В. В. Прасолов

ВНЕУРОЧНАЯ ДЕЯТЕЛЬНОСТЬ

РЕШЕНИЕ ЗАДАЧ ПОВЫШЕННОЙ СЛОЖНОСТИ ПО ГЕОМЕТРИИ

7–9 классы

Учебное пособие
для общеобразовательных
организаций

Москва
«Просвещение»
2019

УДК 373:514+514(075.3)
ББК 22.151я721
П70

6+

Серия «Внеурочная деятельность» основана в 2019 г.

Прасолов В. В.
П70 Решение задач повышенной сложности по геометрии. 7—9 классы : учеб. пособие для общеобразоват. организаций / В. В. Прасолов. — М. : Просвещение, 2019. — 239 с. : ил. — (Внеурочная деятельность). — ISBN 978-5-09-064084-8.

Учебное пособие «Решение задач повышенной сложности по геометрии» предназначено для учащихся 7—9 классов.

В нём представлены примеры решения наиболее типичных задач и задачи для самостоятельного решения, к которым даны ответы и указания.

Пособие можно использовать для подготовки к математической олимпиаде школьников, уровень которой ниже уровня заключительного этапа Всероссийской олимпиады.

УДК 373:514+514(075.3)
ББК 22.151я721

ISBN 978-5-09-064084-8

Предисловие

Учебное пособие по геометрии предназначено для учащихся 7—9 классов. Главы 1—11 относятся к 7 классу, главы 12—21 относятся к 8 классу и главы 22—30 к 9 классу.

Каждая глава начинается с перечисления основных фактов и понятий, относящихся к этой главе. Они могут понадобиться при решении задач.

После перечисления основных фактов и понятий разбираются решения нескольких наиболее типичных задач повышенной сложности. Затем приводятся задачи для самостоятельного решения. В конце пособия к ним приведены ответы и указания. Сначала нужно сверить ответ, а потом, убедившись, что ответ верен, можно обратиться к указаниям. При этом следует иметь в виду, что некоторые задачи допускают решения разными способами, и если в указаниях предлагается другой способ рассуждений, то это ещё не значит, что ваше решение неверное. Но с этим другим решением тоже нужно разобраться.

При решении задач можно выбирать темы для изучения главы либо в том порядке, в каком они расположены в пособии, либо в том порядке, в каком они расположены в школьном учебнике по геометрии для 7—9 классов. Решать задачи желательно именно в предлагаемой последовательности. Порядок предлагаемых для решения задач нацелен на постепенное формирование умения решать задачи. Изученные теоремы применяются для решения задач сначала в более простых частных случаях, а уже после этого в общем виде. Например, теорема о сумме углов применяется сначала для прямоугольных треугольников, а потом для произвольных треугольников; теорема о вписанном угле применяется сначала для угла, опирающегося на диаметр, а после — для произвольного угла.

Пособие можно использовать для подготовки к математической олимпиаде школьников, уровень которой ниже уровня заключительного этапа Всероссийской олимпиады.

Прямая и отрезок, луч и угол

Через две точки проходит прямая, и притом только одна. Две прямые не могут иметь больше одной общей точки.

Для любых трёх точек, лежащих на одной прямой, одна из этих точек лежит между двумя другими.

***Отрезок* — это фигура, состоящая из всех точек прямой, лежащих между двумя данными точками (концами отрезка).**

Прямая разделяет плоскость на две части. Если концы отрезка лежат в одной из этих частей, то отрезок не пересекает прямую, а если концы отрезка лежат в разных частях, то отрезок пересекает прямую.

Точка O, лежащая на прямой a, разделяет прямую a на две части, каждую из которых называют *лучом*, исходящим из точки O. Точку O называют *началом* каждого из этих лучей.

***Угол* — это фигура, состоящая из точки и двух лучей, исходящих из этой точки. Общее начало двух лучей называют *вершиной* угла, а сами лучи — *сторонами* угла.**

Угол называют *развёрнутым*, если его стороны лежат на одной прямой.

***Внутренняя область* неразвёрнутого угла AOB — это общая часть полуплоскости с границей AO, содержащей точку B, и полуплоскости с границей BO, содержащей точку A. Про точки внутренней области угла говорят, что они лежат *внутри* угла.**

Пример 1 Сколько точек пересечения могут иметь три прямые, каждые две из которых пересекаются?

Решение. По условию две данные прямые l_1 и l_2 пересекаются в некоторой точке O. Третья прямая l_3 либо проходит через точку O (рис. 1, *а*), либо не проходит через эту точку. В первом случае прямая l_3 пересекает прямые l_1 и l_2 в одной точке. Во втором случае прямая l_3 пересекает прямые l_1 и l_2 в разных точках (рис. 1, *б*), поскольку единственная общая точка прямых l_1 и l_2 — это точка O.

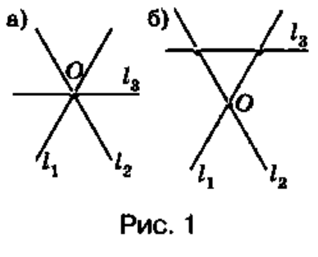


Рис. 1

В первом случае прямые имеют одну общую точку, а во втором случае прямые имеют три общие точки.

Ответ: одну или три.

Пример 2 Точки A, B, C и D не лежат на одной прямой, прямая AB пересекает отрезок CD, прямая CD пересекает отрезок AB. Докажите, что отрезки AB и CD пересекаются.

Решение. Пусть O — точка пересечения прямых AB и CD (рис. 2). Прямая AB пересекает отрезок CD, поэтому точка O лежит между точками C и D, т. е. она лежит на отрезке CD. Прямая CD пересекает отрезок AB, поэтому точка O лежит между точками A и B, т. е. она лежит на отрезке AB.

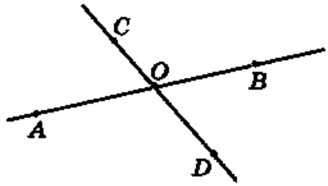


Рис. 2

Пример 3 На сколько частей могут делить плоскость три прямые, каждые две из которых пересекаются?

Решение. Как было показано при разборе примера 1 (с. 4), возможны два случая: три прямые пересекаются либо в одной точке, либо в трёх точках. В первом случае они разделяют плоскость на 6 частей, а во втором — на 7 частей.

Ответ: на 6 или на 7.

Задачи для самостоятельного решения

Количество точек пересечения прямых

1.1. Сколько точек пересечения могут иметь четыре прямые, каждые две из которых пересекаются?

1.2. Сколько точек пересечения могут иметь пять прямых, каждые две из которых пересекаются?

Количество прямых или отрезков

1.3. На плоскости отметили три точки и через каждые две из них провели прямую. Сколько при этом могло получиться прямых?

1.4. На плоскости отметили четыре точки и через каждые две из них провели прямую. Сколько при этом могло получиться прямых?

1.5. На плоскости отметили пять точек и через каждые две из них провели прямую. Сколько при этом могло получиться прямых?

1.6. В каком наибольшем числе точек могут пересекаться 6 прямых?

1.7. В каком наибольшем числе точек могут пересекаться n прямых?

1.8. На прямой отметили 4 точки. Сколько получилось отрезков с концами в этих точках?

1.9. На прямой отметили n точек. Сколько получилось отрезков с концами в этих точках?

Точки, лежащие на одной прямой, и прямые, проходящие через одну точку

1.10. а) Точки A, B, C и D попарно различны, точки A, B и C лежат на одной прямой, точки B, C и D лежат на одной прямой. Докажите, что точки A, B, C и D лежат на одной прямой.

б) Некоторые из точек A, B, C и D могут совпадать, точки A, B и C лежат на одной прямой, точки B, C и D лежат на одной прямой. Обязательно ли точки A, B, C и D лежат на одной прямой?

1.11. а) Прямые a, b, c и d попарно различны, прямые a, b и c пересекаются в одной точке, прямые b, c и d пересекаются в одной точке. Докажите, что прямые a, b, c и d пересекаются в одной точке.

б) Некоторые из прямых a, b, c и d могут совпадать, прямые a, b и c имеют общую точку, прямые b, c и d имеют общую точку. Обязательно ли прямые a, b, c и d имеют общую точку?

Точки по разные стороны от прямой

1.12. Отрезки AB, BC, CD и DE пересекают данную прямую, а их концы не лежат на ней. Пересекает ли эту прямую отрезок AD? А отрезок AE?

1.13. Отрезок AB пересекает прямую l, а отрезок AC её не пересекает. На отрезке AC отмечена точка D. Пересекает ли отрезок BD прямую l?

Количество частей

1.14. На сколько частей могут делить плоскость 4 прямые, каждые две из которых пересекаются?

1.15. На сколько частей могут делить плоскость 5 прямых, каждые две из которых пересекаются?

Глава 2
Сравнение и измерение отрезков и углов

За единицу измерения можно принять любой отрезок. *Длина* отрезка выражается положительным числом, показывающим, сколько раз укладывается в нём единица измерения и её части.

Расстоянием между точками A и B называют длину отрезка AB.

Если точка разбивает отрезок на два отрезка, то длина всего отрезка равна сумме длин этих отрезков.

Если луч разбивает угол на два угла, то градусная мера всего угла равна сумме градусных мер этих двух углов.

Развёрнутый угол равен $180°$.

Угол называют *прямым*, если он равен $90°$. Угол, меньший прямого, называют *острым*, а угол, который больше прямого, но меньше развёрнутого, называют *тупым*.

Середина отрезка — это точка, делящая его на два равных отрезка.

Биссектриса угла — это луч, делящий его на два равных угла.

На любом луче от его начала можно отложить отрезок данной длины, и притом только один.

Пример 1 В деревне A живут 50 школьников, а в деревне B живут 100 школьников. Расстояние между деревнями равно 3 км. В какой точке дороги из A в B нужно построить школу, чтобы суммарное расстояние, проходимое всеми школьниками, было как можно меньше?

Решение. Пусть расстояние от школы до деревни B равно x км. Тогда суммарное расстояние в километрах, проходимое всеми школьниками из деревни B, равно $100x$, а расстояние, проходимое школьниками из деревни A, равно $50(3 - x)$. Поэтому расстояние, проходимое всеми школьниками, равно $100x + 50(3 - x) = 150 + 50x$. Оно будет наименьшим, когда $x = 0$, т. е. школа находится в деревне B.

Ответ: в деревне B.

Пример 2 Какой угол образуют часовая и минутная стрелки в 3 ч 10 мин?

Решение. В 3 ч часовая и минутная стрелки образуют угол 90°. Часовая стрелка за 1 ч проходит угол 30°, поэтому за 1 мин она проходит 0,5°. Минутная стрелка за 1 ч проходит 360°, поэтому за 1 мин она проходит 6°. Следовательно, за 10 мин минутная стрелка пройдёт 60°, сокращая угол, а часовая стрелка пройдёт 5°, увеличивая угол (рис. 3). В итоге получится угол $90° - 60° + 5° = 35°$.

Ответ: 35°.

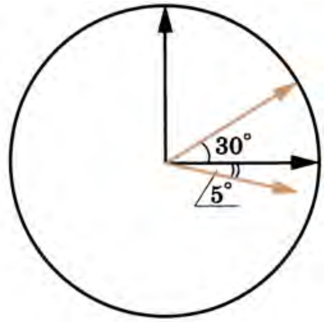


Рис. 3

Пример 3 На линейке есть деления 0, 4 и 11 см. Постройте отрезок длиной 1 см.

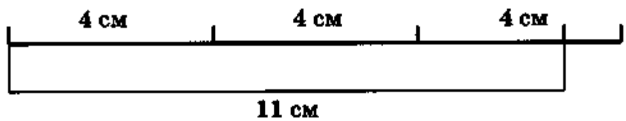


Рис. 4

Решение. Имеющиеся деления позволяют строить отрезки длиной 4 см и 11 см. Трижды отложив отрезок длиной 4 см, получим отрезок длиной 12 см. Отложив на отрезке длиной 12 см отрезок длиной 11 см, получим отрезок длиной 1 см (рис. 4).

Задачи для самостоятельного решения

Середина отрезка

2.1. Точки A, B и C лежат на одной прямой, $AB = 6$ и $AC = 2$. Чему может быть равно расстояние от точки A до середины отрезка BC?

2.2. Точки A, B и C лежат на одной прямой, точки M и N — середины отрезков AB и AC. Докажите, что $BC = 2MN$.

2.3. На прямой отмечены три точки. Могут ли середины двух отрезков с концами в этих точках совпадать?

2.4. На прямой отмечены четыре точки. Могут ли середины двух отрезков с концами в этих точках совпадать?

2.5. На прямой отмечены пять точек. Могут ли середины трёх отрезков с концами в этих точках совпадать?

Сумма расстояний

2.6. На прямолинейной дороге стоят три дома. В каком месте дороги нужно выкопать колодец, чтобы сумма расстояний от домов до колодца была наименьшей?

2.7. На прямой отмечены точки A_1, ..., A_{10}, причём точки A_2, ..., A_9 лежат на отрезке A_1A_{10}, длина которого равна 1 см. Докажите, что сумма попарных расстояний между отмеченными точками больше 8 см.

2.8. На прямой AB отмечены 25 точек, лежащих вне отрезка AB. Может ли сумма расстояний от этих точек до точки A быть равной сумме расстояний от них до точки B?

Построение отрезка данной длины линейкой с тремя делениями

2.9. На линейке есть деления 0, 3 и 8 см. Постройте отрезок длиной 7 см.

2.10. На линейке есть деления 0, 7 и 11 см. Постройте отрезок длиной: а) 8 см; б) 1см.

2.11. На линейке есть деления 0, 13 и 17 см. Постройте отрезок длиной: а) 3 см; б) 1 см; в) 9 см.

Биссектриса угла

2.12. Из точки O проведены лучи OA, OB и OC так, что $\angle AOB = 140°$, $\angle BOC = 60°$ и $\angle AOC = 80°$. Найдите угол между биссектрисами углов AOC и BOC.

2.13. Из точки O проведены лучи OA, OB и OC так, что $\angle AOB = 140°$, $\angle BOC = 60°$ и $\angle AOC = 160°$. Найдите угол между биссектрисами углов AOC и BOC.

2.14. Неразвёрнутые углы AOC и BOC равны α и β. Найдите угол между их биссектрисами.

Угол между стрелками часов

2.15. Какой угол (острый или тупой) образуют стрелки часов: а) в 3 ч 1 мин; б) в 2 ч 59 мин?

2.16. В некоторый момент угол между часовой и минутной стрелками равен α. Через час он снова равен α. Найдите все возможные значения α.

2.17. Сколько раз в сутки часовая и минутная стрелки образуют угол 90°?

Построение данного угла с помощью угольника

Комментарий. Построение данного угла с помощью угольника, угол которого известен, во многом похоже на построение данного отрезка с помощью линейки с двумя делениями. Такая линейка позволяет откладывать отрезки двух данных длин, а угольник позволяет откладывать углы двух данных величин: угол угольника и угол 180° (его можно получить, воспользовавшись стороной угла как линейкой).

2.18. Имеется угольник с углом 40°. Как с его помощью построить угол, равный 20°?

2.19. Имеется угольник с углом 70°. Как с его помощью построить угол, равный 40°?

2.20. Имеется угольник с углом 19°. Как с его помощью построить угол, равный 1°?

Примеры расположения точек и лучей

2.21. Отметьте на прямой четыре точки так, чтобы попарные расстояния между ними были следующие: 2, 3, 5, 7, 10 и 12.

2.22. Отметьте на прямой четыре точки так, чтобы попарные расстояния между ними были следующие: 2, 3, 5, 7, 9 и 12.

2.23. Можно ли провести из одной точки на плоскости пять лучей так, чтобы среди образованных ими углов было ровно четыре острых? Рассматриваются углы не только между соседними, но и между любыми двумя лучами.

2.24. Можно ли отметить на прямой четыре точки так, чтобы попарные расстояния между ними были следующие: 2, 3, 5, 7, 8 и 12?

Перпендикулярные прямые, смежные и вертикальные углы

Два угла, у которых одна сторона общая, а две другие являются продолжениями одна другой, называют *смежными*. Сумма смежных углов равна 180°.

Два угла называют *вертикальными*, если стороны одного угла являются продолжениями сторон другого угла. Вертикальные углы равны.

Две прямые называют *перпендикулярными*, если они образуют четыре прямых угла.

Пусть точка A не лежит на прямой a, точка H лежит на прямой a и прямые a и AH перпендикулярны. Тогда отрезок AH называют *перпендикуляром*, проведённым к прямой a из точки A.

Из точки, не лежащей на прямой, можно провести перпендикуляр к этой прямой, и притом только один.

Задачи для самостоятельного решения

3.1. Найдите угол между биссектрисами двух смежных углов.

3.2. Три прямые пересекаются в одной точке, отмеченные на рисунке 5 углы равны. Найдите величину отмеченных углов.

3.3. Докажите, что биссектрисы двух вертикальных углов лежат на одной прямой.

3.4. Две прямые делят плоскость на четыре угла. Докажите, что биссектрисы этих углов лежат на двух перпендикулярных прямых.

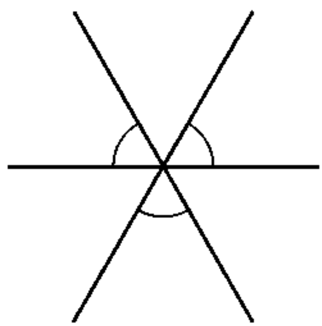


Рис. 5

Равнобедренный треугольник

Треугольник, у которого равны две стороны, называют *равнобедренным*. Две равные стороны этого треугольника называют *боковыми сторонами*, а третью сторону называют *основанием* равнобедренного треугольника.

Треугольник, у которого равны все три стороны, называют *равносторонним*.

Углы при основании равнобедренного треугольника равны.

Если два угла треугольника равны, то он равнобедренный.

Медианой треугольника называют отрезок, соединяющий вершину с серединой противоположной стороны.

Биссектрисой треугольника называют отрезок биссектрисы его угла от вершины до точки пересечения с противоположной стороной.

Высотой треугольника называют перпендикуляр, проведённый из вершины треугольника к прямой, содержащей противоположную сторону.

В равнобедренном треугольнике медиана, биссектриса и высота, проведённые к основанию, совпадают.

Задачи для самостоятельного решения

4.1. Биссектрисы углов при основании AC равнобедренного треугольника ABC пересекаются в точке O. Докажите, что $AO = OC$.

4.2. Докажите, что противолежащие основанию вершины всех равнобедренных треугольников с общим основанием лежат на одной прямой.

4.3. Четыре точки A, B, C и D таковы, что отрезки AB, BC, CD и DA равны (рис. 6). Докажите, что $AC \perp BD$.

4.4. Медиана AM треугольника ABC вдвое меньше его стороны BC. Докажите, что $\angle A = \angle B + \angle C$.

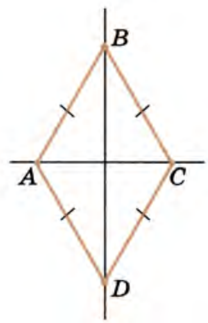


Рис. 6

Признаки равенства треугольников

Первый признак равенства треугольников. Если две стороны и угол между ними одного треугольника соответственно равны двум сторонам и углу между ними другого треугольника, то такие треугольники равны.

Второй признак равенства треугольников. Если сторона и два прилежащих к ней угла одного треугольника соответственно равны стороне и двум прилежащим к ней углам другого треугольника, то такие треугольники равны.

Третий признак равенства треугольников. Если три стороны одного треугольника соответственно равны трём сторонам другого треугольника, то такие треугольники равны.

При записи равенства треугольников удобно соблюдать соответствие вершин, чтобы равенство $\triangle ABC = \triangle DEF$ означало не только равенство треугольников ABC и DEF, но и равенство соответственных сторон: $AB = DE$, $BC = EF$ и $AC = DF$. Соответственные углы при этом тоже равны: $\angle A = \angle D$, $\angle B = \angle E$ и $\angle C = \angle F$.

Точка M лежит *внутри* треугольника ABC, если она лежит во внутренней области углов BAC, CBA и ACB, т. е. точки M и A лежат по одну сторону от прямой BC, точки M и B — по одну сторону от прямой AC, точки M и C лежат по одну сторону от прямой AB.

Пример На одной стороне угла с вершиной O отмечены точки A и C, на другой — точки B и D, отрезки AD и BC пересекаются в точке E (рис. 7). Докажите, что если $AC = BD$ и $OA = OB$, то луч OE является биссектрисой угла AOB.

Решение. Треугольники OAD и OBC равны по двум сторонам ($OA = OB$ и $OD = OB + BD = OA + AC = OC$) и углу между ними.

Треугольники EAC и EBD равны по стороне ($AC = BD$) и прилежащим к ней углам (углы C и D являются равными углами треугольников OAD и OBC, а углы A и B являются смежными с равными углами этих треугольников).

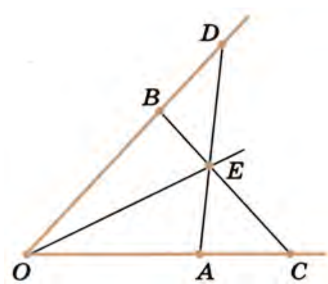


Рис. 7

Треугольники OEC и OED равны по трём сторонам (сторона OE у них общая, равенство сторон OC и OD следует непосредственно из условия, равенство сторон EC и ED следует из равенства треугольников EAC и EBD).

Из равенства треугольников OEC и OED следует равенство углов COE и DOE.

Задачи для самостоятельного решения

Равнобедренный треугольник

5.1. Внутри треугольника ABC отмечена точка O так, что луч BO делит пополам углы ABC и AOC (рис. 8). Докажите, что треугольник ABC равнобедренный.

5.2. На боковых сторонах AB и BC равнобедренного треугольника ABC отмечены точки D и E так, что $\angle AMD = \angle CME$, где M — середина основания AC. Докажите, что $AE = CD$.

5.3. На наибольшей стороне AC треугольника ABC отмечены точки M и N так, что $AM = AB$ и $CN = CB$. Докажите, что если $BM = BN$, то треугольник ABC равнобедренный.

Равные отрезки

5.4. Биссектриса BK треугольника ABC равна стороне AB. На продолжении отрезка BK за точку K отмечена точка L так, что $\angle BAK + \angle BAL = 180°$. Докажите, что $BL = BC$.

5.5. У звезды, изображённой на рисунке 9, равны углы с вершинами A и B, углы с вершинами C и E, а также $AC = BE$. Докажите, что $AD = BD$.

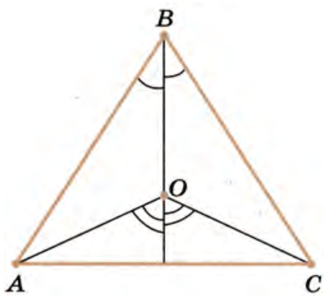


Рис. 8

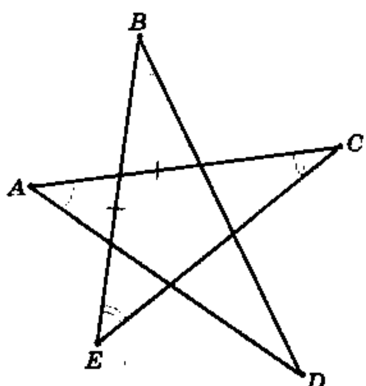


Рис. 9

5.6. Точки A, B и C лежат на одной прямой, вне этой прямой отмечены точки D и E так, что $AD = AE$ и $BD = BE$. Докажите, что $CD = CE$.

5.7. Точка O — середина медианы AM треугольника ABC, $BO = BM$. Прямая CO пересекает сторону AB в точке K. Докажите, что $KA = KO$.

Вспомогательные равные треугольники

Комментарий. Для решения геометрической задачи иногда бывает нужно рассмотреть дополнительную точку или провести дополнительную прямую. В результате появляется дополнительный (вспомогательный) треугольник, равный какому-либо другому треугольнику.

5.8. На стороне AC треугольника ABC отмечены точки L и K так, что L — середина отрезка AK и BK — биссектриса угла LBC. При этом $BC = 2BL$. Докажите, что $KC = AB$.

5.9. Биссектриса AD треугольника ABC равна отрезку DC, $AC = 2AB$. Найдите угол B.

Комментарий. Можно найти и остальные углы треугольника: $\angle A = 60°$ и $\angle C = 30°$ (см. задачу 6.7).

Неверные признаки равенства треугольников

5.10. Две стороны одного треугольника равны двум сторонам другого треугольника. Равны также высоты, проведённые к третьим сторонам. Могут ли эти треугольники быть неравными?

5.11. Две стороны и угол одного треугольника равны двум сторонам и углу другого треугольника. Могут ли эти треугольники быть неравными?

5.12. Два угла и сторона одного треугольника равны двум углам и стороне другого треугольника. Могут ли эти треугольники быть неравными?

5.13. На равных сторонах AB и BC треугольника ABC отмечены точки M и N так, что $AN = CM$ (рис. 10). Могут ли отрезки AM и CN быть неравными?

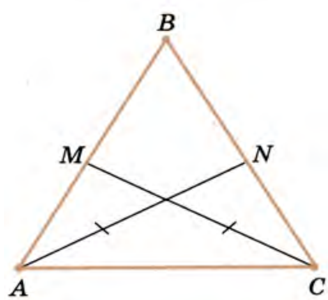


Рис. 10

Прямоугольные треугольники

Треугольник, один из углов которого прямой, называют *прямоугольным*. У треугольника не может быть двух прямых углов. Сторону прямоугольного треугольника, лежащую против прямого угла, называют *гипотенузой*, а две другие стороны называют *катетами*.

Сумма острых углов прямоугольного треугольника равна 90°.

Гипотенуза прямоугольного треугольника больше любого из катетов.

Катет прямоугольного треугольника, лежащий против угла в 30°, равен половине гипотенузы. Если катет прямоугольного треугольника равен половине гипотенузы, то угол, лежащий против этого катета, равен 30°.

***Серединный перпендикуляр* к отрезку — это прямая, проходящая через середину отрезка перпендикулярно к нему.**

Каждая точка серединного перпендикуляра к отрезку равноудалена от концов этого отрезка. Каждая точка, равноудалённая от концов отрезка, лежит на серединном перпендикуляре к этому отрезку.

Каждая точка биссектрисы неразвёрнутого угла равноудалена от его сторон. Каждая точка, лежащая внутри неразвёрнутого угла, равноудалённая от его сторон, лежит на его биссектрисе.

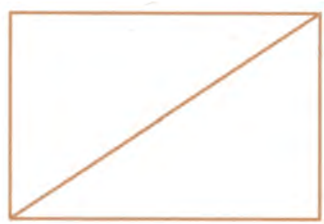


Рис. 11

***Прямоугольник* — это фигура, составленная из двух прямоугольных треугольников (рис. 11). Углы этой фигуры равны 90°. Противоположные стороны этой фигуры равны.**

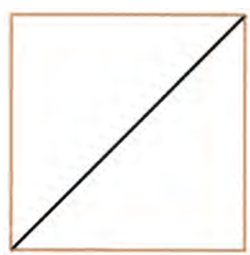


Рис. 12

***Квадрат* — это фигура, составленная из двух равнобедренных прямоугольных треугольников (рис. 12). Углы этой фигуры равны 90°. Все стороны этой фигуры равны.**

Треугольник, составленный из двух прямоугольных треугольников с углом 30°, равносторонний (рис. 13). Треугольник, у которого две стороны равны, а угол между ними равен 60°, равносторонний. Углы равностороннего треугольника равны 60°.

Равнобедренный треугольник можно сложить из двух равных прямоугольных треугольников (рис. 14), поэтому сумма углов равнобедренного треугольника равна 180°.

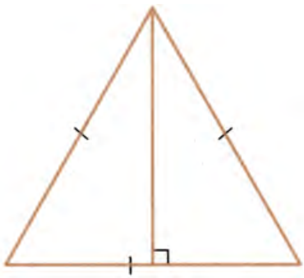


Рис. 13

Рис. 14

Пример 1 Точка K — середина гипотенузы AB прямоугольного равнобедренного треугольника ABC. На катетах BC и AC соответственно отмечены точки L и M так, что $BL = CM$. Докажите, что треугольник LKM тоже прямоугольный равнобедренный.

Решение. Медиана CK равнобедренного треугольника ACB является его биссектрисой, поэтому $KB = KC$. Треугольники KLB и KMC равны по двум сторонам ($BL = CM$ и $KB = KC$) и углу между ними ($\angle KBL = \angle KCM = 45°$). Поэтому $LK = KM$ и $\angle LKM = \angle LKC + \angle CKM = \angle LKC + \angle BKL = \angle BKC = 90°$.

Пример 2 Докажите, что медиана прямоугольного треугольника, проведённая к гипотенузе, равна половине гипотенузы.

Решение. Выберем на гипотенузе AB прямоугольного треугольника ABC точку M так, что $\angle ACM = \angle A$. Тогда $\angle BCM = 90° - \angle ACM = 90° - \angle A = \angle B$, поэтому $MB = MC = MA$. Таким образом, CM — медиана и $2CM = MA + MB = AB$.

Задачи для самостоятельного решения

Равенство прямоугольных треугольников

6.1. Докажите равенство прямоугольных треугольников по катету и медиане, проведённой к другому катету.

6.2. Докажите равенство прямоугольных треугольников по катету и противолежащему острому углу.

6.3. Докажите, что треугольник, в котором равны две высоты, равнобедренный.

Сумма углов прямоугольного треугольника

6.4. В треугольнике ABC с прямым углом C проведена высота CH. Биссектриса AD угла A пересекает отрезок CH в точке K. Докажите, что $CK = KD$.

6.5. В треугольнике ABC с прямым углом C проведена высота CH, а в треугольнике ACH проведена биссектриса CD. Докажите, что $CB = BD$.

6.6. В треугольнике ABC с прямым углом C проведена высота CH. Докажите, что биссектрисы углов BAC и BCH перпендикулярны.

6.7. Биссектриса AD треугольника ABC равна отрезку DC, $AC = 2AB$. Найдите углы треугольника ABC.

6.8. Сторона BC треугольника ABC вдвое больше стороны AC. На стороне BC отмечена точка D, для которой $\angle CAD = \angle B$. Прямая AD пересекает биссектрису угла, смежного с углом ACB, в точке E. Докажите, что $AE = AB$.

Прямоугольный треугольник с углом 30°

6.9. В равнобедренном треугольнике ABC угол при основании AC равен 75°. Докажите, что высота AH вдвое меньше боковой стороны.

6.10. Прямоугольный лист бумаги $ABCD$ согнули (вдоль прямой BK) так, как показано на рисунке 15. Найдите отношение $DK : AB$, если точка C_1 — середина стороны AD.

6.11. Медиана и высота, выходящие из вершины одного угла треугольника, делят этот угол на три равные части. Найдите углы этого треугольника.

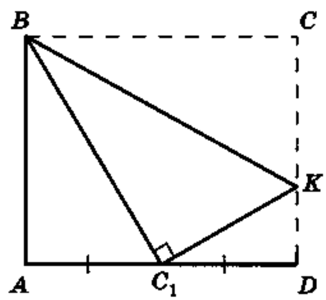


Рис. 15

Медиана прямоугольного треугольника, проведённая к гипотенузе

6.12. На гипотенузе AB прямоугольного треугольника ABC отмечена точка M так, что $AM = CM$. Докажите, что точка M — середина гипотенузы.

6.13. Докажите, что биссектриса прямого угла прямоугольного треугольника с неравными катетами делит пополам угол между медианой и высотой.

6.14. На гипотенузе AB прямоугольного треугольника ABC отмечена точка D так, что $BD = BC$, а на катете BC отмечена точка E так, что $BE = ED$. Докажите, что $AD + CE = DE$.

Равносторонний треугольник

6.15. Сторона AB треугольника ABC вдвое больше стороны AC, и $\angle A = 60°$. Найдите угол C.

6.16. На сторонах AB, BC и CA равностороннего треугольника ABC отмечены точки P, Q и R так, что $AP : PB = BQ : QC = CR : RA = 2 : 1$. Докажите, что стороны треугольника PQR перпендикулярны сторонам треугольника ABC.

6.17. В треугольнике ABC угол A равен $60°$, $AB > AC$. Докажите, что существует треугольник, стороны которого равны AC, BC и $AB - AC$.

6.18. В треугольнике ABC угол A равен $120°$. Докажите, что существует треугольник, стороны которого равны AC, BC и $AB + AC$.

6.19. Два равносторонних треугольника имеют общую вершину (рис. 16). Докажите, что $AD = BE$.

6.20. На биссектрисе угла A треугольника ABC отмечена точка D так, что $AD = AB + AC$. Докажите, что треугольник DBC равносторонний, если $\angle BAC = 120°$.

6.21. Через точку Y на стороне AB равностороннего треугольника проведена прямая, пересекающая сторону BC в точке Z, а продолжение стороны AC за точку A в точке X. Докажите, что если $XY = YZ$ и $AY = BZ$, то $XZ \perp BC$.

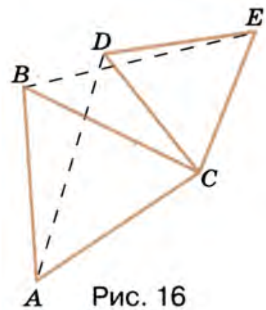


Рис. 16

Прямоугольник

6.22. Точка M — середина стороны AB прямоугольника $ABCD$, а точка H — основание перпендикуляра, проведённого из точки C к прямой MD. Докажите, что $BC = BH$.

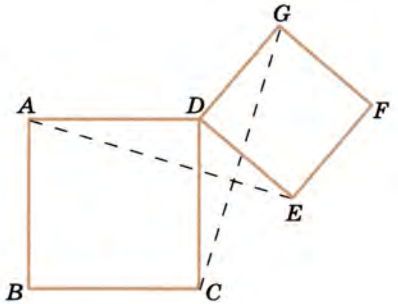


Рис. 17

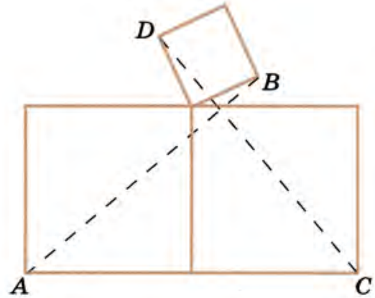


Рис. 18

6.23. На диагонали AC прямоугольника $ABCD$ отмечена точка K так, что $CK = CB$. На стороне BC отмечена точка M так, что $CM = MK$. Докажите, что $AK + BM = CM$.

6.24. Сторона AB прямоугольника $ABCD$ равна 1. Точка E — середина стороны BC, точка F — основание перпендикуляра, проведённого из точки A к прямой DE. Найдите длину отрезка BF.

Квадрат

6.25. Два квадрата имеют общую вершину (рис. 17). Докажите, что $AE = CG$.

6.26. Три квадрата расположены так, как показано на рисунке 18. Докажите, что $AB = CD$.

6.27. На стороне квадрата $ABCD$ построен равносторонний треугольник ABE (вершина E расположена внутри квадрата, рис. 19). Найдите углы треугольника CDE.

6.28. На стороне квадрата $ABCD$ построен равносторонний треугольник ABE (вершина E расположена вне квадрата, рис. 20). Найдите углы треугольника CDE.

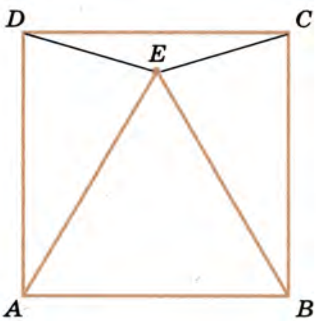


Рис. 19

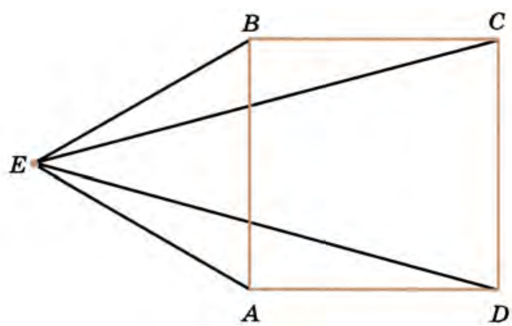


Рис. 20

6.29. На сторонах AB и BC квадрата $ABCD$ внутренним и внешним образом построены равносторонние треугольники ABE и BCF (рис. 21). Докажите, что точки D, E и F лежат на одной прямой.

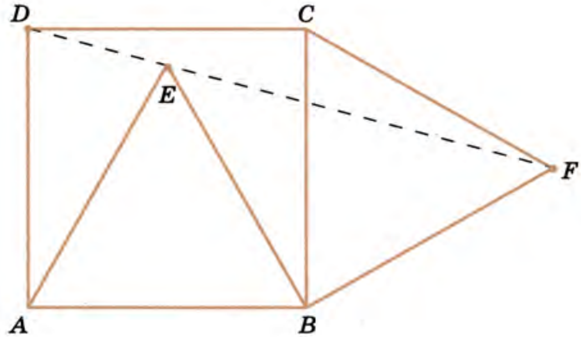


Рис. 21

6.30. На сторонах BC и CD квадрата $ABCD$ отмечены точки E и F так, что $\angle EAF = 45°$. Докажите, что $EF = BE + DF$.

6.31. На сторонах квадрата отложены 4 равных отрезка (как показано на рисунке 22). Докажите, что два отмеченных угла равны.

6.32. На продолжении диагонали AC квадрата $ABCD$ за точку C отмечена точка E так, что $BE = AC$. Найдите угол AEB.

6.33. На стороне AB квадрата $ABCD$ отмечена точка P. Биссектриса угла DCP пересекает сторону AD в точке Q. Докажите, что $CP = DQ + BP$.

6.34. На диагонали AC квадрата $ABCD$ отмечена точка M так, что $AM = 3CM$, точка O — середина стороны AB. Найдите угол DMO.

6.35. Найдите сумму величин двух углов, нарисованных на клетчатой бумаге (рис. 23).

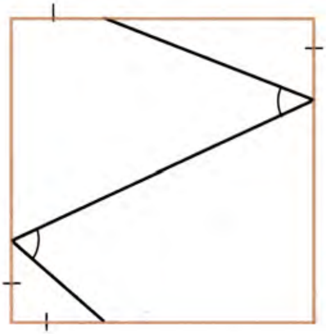


Рис. 22

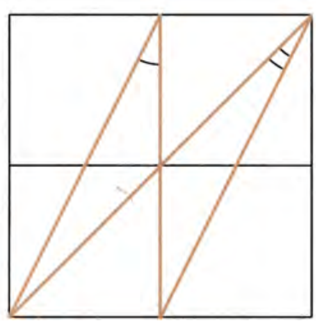


Рис. 23

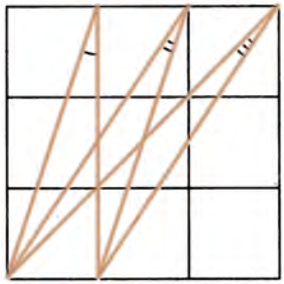


Рис. 24

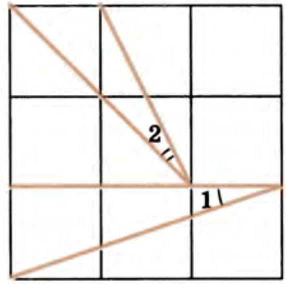


Рис. 25

6.36. Найдите сумму величин трёх углов, нарисованных на клетчатой бумаге (рис. 24).

6.37. От квадрата отрезан прямоугольный треугольник, сумма катетов которого равна стороне квадрата. Найдите сумму углов, под которыми видна гипотенуза этого треугольника из трёх оставшихся вершин квадрата.

6.38. Катет BC прямоугольного треугольника ABC втрое больше катета AC. Он разделён точками D и E на три равные части. Найдите сумму углов AEC, ADC и ABC.

6.39. Каждая сторона квадрата разделена на три равные части, и точки деления соединены отрезками, как показано на рисунке 25. Докажите, что углы 1 и 2 равны.

Сумма углов треугольника

Сумма углов треугольника равна 180°. Мы уже ранее пользовались этим фактом для прямоугольных треугольников и для равнобедренных треугольников.

Внешним углом **треугольника называют угол, смежный с каким-нибудь из углов этого треугольника.**

Внешний угол треугольника равен сумме двух углов треугольника, не смежных с этим внешним углом.

Пример 1 Биссектрисы BB_1 и CC_1 треугольника ABC пересекаются в точке O (рис. 26). Найдите угол BOC, если известен угол A.

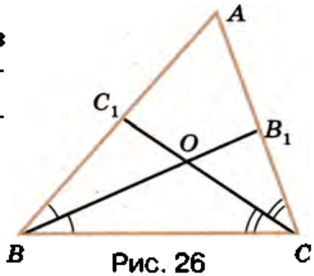


Рис. 26

Решение. Угол BOC можно выразить через углы OBC и OCB: $\angle BOC = 180° - \angle OBC - \angle OCB = 180° - \frac{1}{2}\angle B - \frac{1}{2}\angle C$. Кроме того, $\angle B + \angle C = 180° - \angle A$, поэтому $\angle BOC = 90° + \frac{1}{2}\angle A$.

Ответ: $90° + \frac{1}{2}\angle A$.

Пример 2 Угол B треугольника ABC равен β. На продолжении стороны AC за точку A отложен отрезок AD, равный AB, а на продолжении стороны AC за точку C отложен отрезок CE, равный CB (рис. 27). Найдите угол DBE.

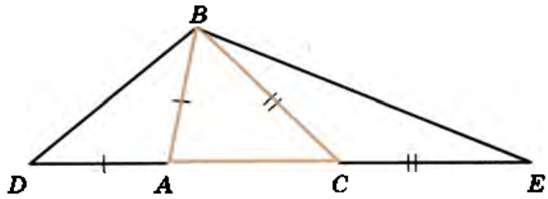


Рис. 27

Решение. Пусть углы A и C равны α и γ. Угол A — это внешний угол равнобедренного треугольника BAD, поэтому $\angle DBA = \frac{\alpha}{2}$.

Аналогично $\angle CBE = \frac{\gamma}{2}$. Следовательно, $\angle DBE = \frac{\alpha}{2} + \beta + \frac{\gamma}{2}$. Кроме того, $\frac{\alpha}{2} + \frac{\gamma}{2} = \frac{180° - \beta}{2}$, поэтому $\angle DBE = 90° + \frac{\beta}{2}$.

Ответ: $90° + \frac{\beta}{2}$.

Пример 3 Внутри квадрата $ABCD$ отмечена точка E так, что треугольник ABE равносторонний. Отрезки AC и BE пересекаются в точке F. Докажите, что $CE = CF$ (на рисунке 28 эти отрезки отмечены).

Решение. Треугольник CBE равнобедренный, поскольку $BC = BA = BE$. Поэтому

$$\angle CEB = \frac{180° - 30°}{2} = 75°.$$

В треугольнике ABF известны два угла, поэтому можно найти третий угол: $\angle AFB = 180° - 45° - 60° = 75°$. Таким образом, $\angle EFC = \angle AFB = 75° = \angle CEF$, поэтому $CE = CF$.

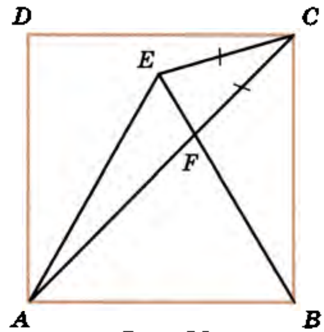


Рис. 28

Пример 4 Угол при вершине A равнобедренного треугольника с основанием BC равен $110°$. Внутри этого треугольника отмечена точка M так, что $\angle CBM = 30°$ и $\angle BCM = 25°$ (рис. 29). Найдите угол AMC.

Решение. Пусть N — точка пересечения прямой BM и высоты AH (рис. 30). Углы B и C равны $\frac{180° - 110°}{2} = 35°$, поэтому $\angle ACN = 35° - 30° = \angle ACH - \angle HCN = 5° = 30° - 25° = \angle HCN - \angle MCH = \angle MCN$ и $\angle CNA = 180° - 55° - 5° = 120° = \angle CNM$. Следовательно,

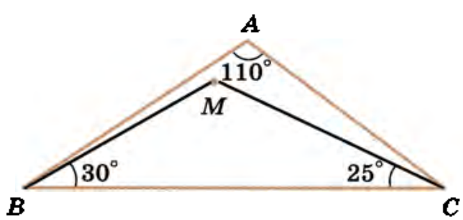


Рис. 29

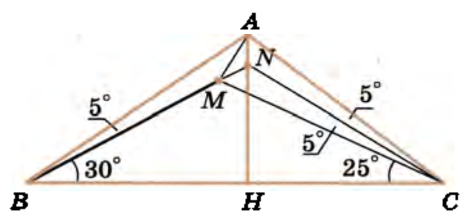


Рис. 30

треугольники CAN и CMN равны по общей стороне CN и прилегающим к ней углам. Таким образом, треугольник ACM равнобедренный и углы при его основании равны $\frac{180°-10°}{2}=85°$.

Ответ: 85°.

Задачи для самостоятельного решения

Выражение угла треугольника через сумму двух других углов

7.1. На гипотенузе AB прямоугольного треугольника ABC отмечены точки M и N так, что $AM = AC$ и $BM = BC$. Найдите угол NCM.

7.2. Медиана CM треугольника ABC равна половине стороны AB. Найдите угол C этого треугольника.

7.3. Один из углов треугольника на 120° больше другого. Докажите, что биссектриса, проведённая из вершины третьего угла, равна удвоенной высоте, проведённой из той же вершины.

7.4. Два равносторонних треугольника ABC и CDE имеют общую вершину C (рис. 31). Отрезки AD и BE пересекаются в точке O. Найдите угол AOB.

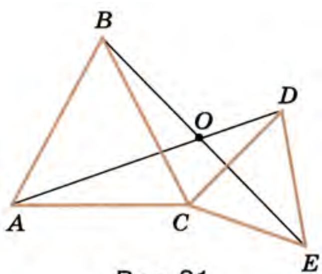


Рис. 31

7.5. На одной стороне угла с вершиной O отмечены точки A и C, на другой — точки B и D, отрезки AD и BC пересекаются в точке E (рис. 32). Докажите, что если $AC = BD$ и $\angle ADO = \angle BCO$, то луч OE является биссектрисой угла AOB.

7.6. Равносторонний треугольник перегнули так, что одна его вершина попала на противоположную сторону (рис. 33). Докажите, что $\angle 1 = \angle 2$.

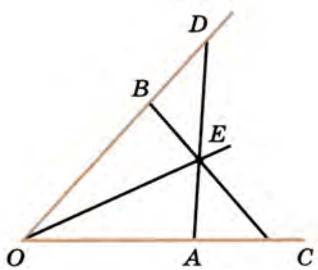


Рис. 32

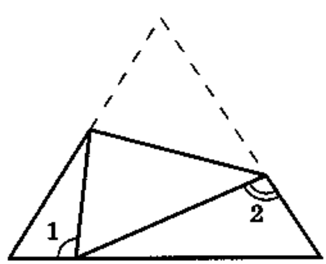


Рис. 33

Внешний угол треугольника

7.7. Внутри треугольника ABC отмечена точка O. Докажите, что $\angle AOC > \angle ABC$.

7.8. На стороне BC равнобедренного треугольника ABC с основанием AC отмечена точка D так, что $\angle CAD : \angle DAB = 1 : 2$. Отрезок AD пересекает высоту BH в точке E. Докажите, что $DE = DC$.

7.9. В треугольнике ABC проведена биссектриса BE. Докажите, что если $BC + CE = AB$, то $\angle C = 2\angle A$.

7.10. На стороне BC треугольника ABC отмечена точка M так, что $BM = AB$. Найдите разность углов BAM и CAM, если $\angle ACB = 35°$.

Равнобедренный треугольник

7.11. В треугольнике ABC, в котором $\angle A = 36°$ и $\angle B = 108°$, проведены биссектрисы AA_1 и BB_1. Докажите, что $AA_1 = 2BB_1$.

7.12. На стороне BC равнобедренного треугольника ABC ($AB = BC$) отмечены точки N и M ($BN < BM$) так, что $NM = AM$ и $\angle MAC = \angle BAN$. Найдите угол CAN.

7.13. На основании AC равнобедренного треугольника ABC отмечена точка D, а на боковых сторонах AB и BC — точки E и F так, что $DE = DF$. Докажите: а) если $\angle EDF = \angle A$, то $AE + FC = AC$; б) если $AE + FC = AC$, то $\angle EDF = \angle A$.

7.14. На стороне AC равностороннего треугольника ABC отмечена точка M, а на продолжении стороны BC за точку C отмечена точка N так, что $MB = MN$. Докажите, что $AM = CN$.

7.15. На сторонах AB и BC равностороннего треугольника отмечены точки D и K, а на стороне AC отмечены точки E и M так, что $AE + AD = CK + CM = AB$. Отрезки DM и EK пересекаются в точке P. Найдите угол EPM.

Равнобедренный треугольник, составленный из равнобедренных треугольников

7.16. Стороны AB и AC треугольника ABC равны. На стороне AB отмечена точка P так, что $CP = BC$, а на стороне AC отмечена точка Q так, что $PQ = BC$. Найдите угол QPC, если угол A равен: а) 30°; б) 20°.

7.17. Стороны AB и AC треугольника ABC равны. На стороне AB отмечена точка P так, что $CP = BC$, а на стороне AC отмечена точка Q так, что $PQ = BC$. Найдите угол A, если $AQ = QP$.

7.18. Стороны AB и AC треугольника ABC равны. На стороне AB отмечены точки P и R, на стороне AC отмечена точка Q так, что $CP = PQ = QR = BC$. Найдите угол A, если $AR = BC$.

7.19. Равнобедренный треугольник ABC разбит отрезком AD на два равнобедренных треугольника ACD и ABD. Это можно сделать разными способами (рис. 34, *а—г*). Для каждого из этих способов найдите углы треугольника ABC.

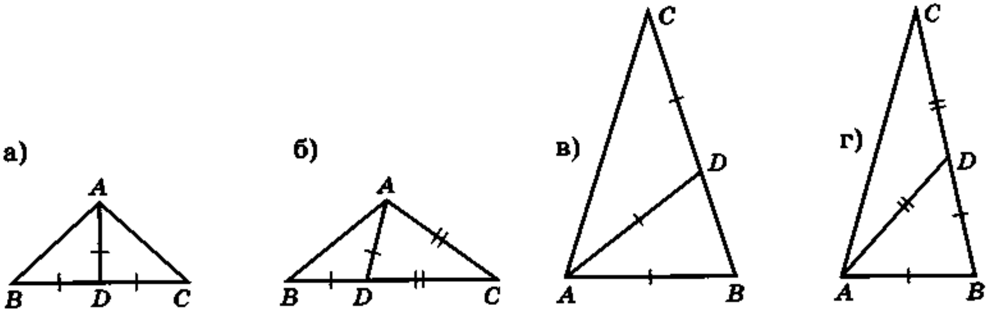


Рис. 34

Треугольники с двумя соответственно равными сторонами и равными углами не между ними

7.20. Треугольники ABC и $A_1B_1C_1$ таковы, что $\angle A = \angle A_1$, $AB = A_1B_1$ и $BC = B_1C_1$. Докажите, что $\angle C = \angle C_1$ или $\angle C + \angle C_1 = 180°$.

Замечание. Угол C в задаче 7.20 — это не угол между соответственно равными сторонами.

7.21. Треугольники ABC и $A_1B_1C_1$ таковы, что $\angle A = \angle A_1 \geqslant 90°$, $AB = A_1B_1$ и $BC = B_1C_1$. Докажите, что эти треугольники равны.

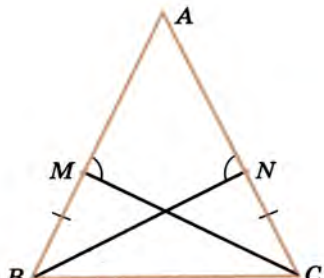


Рис. 35

7.22. На сторонах AB и AC треугольника ABC отмечены точки M и N так, что $BM = CN$ и $\angle AMC = \angle ANB$ (рис. 35). Докажите, что этот треугольник равнобедренный.

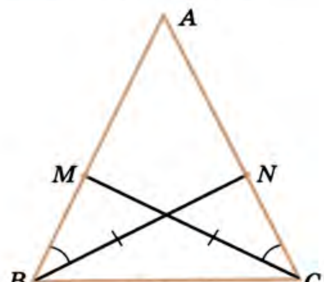


Рис. 36

7.23. На сторонах AB и AC треугольника ABC отмечены точки M и N так, что $BN = CM$ и $\angle ACM = \angle ABN$ (рис. 36). Докажите, что этот треугольник равнобедренный.

Вычисление углов в треугольниках

7.24. Внутри равнобедренного треугольника ABC с основанием BC и углом A, равным $80°$, отмечена точка M так, что $\angle MBC = 30°$ и $\angle MCB = 10°$ (рис. 37). Найдите угол AMC.

7.25. На боковых сторонах BA и BC равнобедренного треугольника ABC с углом B, равным $20°$, отмечены точки Q и P так, что $\angle ACQ = 60°$ и $\angle CAP = 50°$ (рис. 38). Найдите угол APQ.

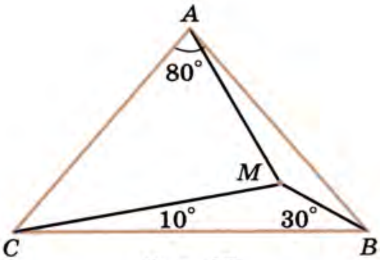


Рис. 37

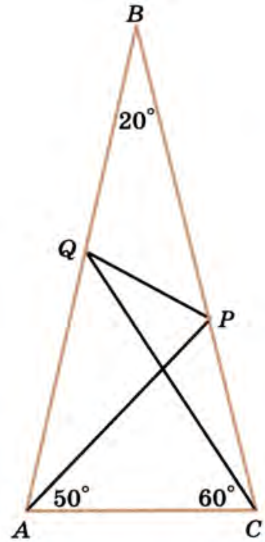


Рис. 38

Подсчёт суммы углов двумя способами

7.26. Может ли сумма любых двух углов треугольника быть больше $120°$?

7.27. Точки A', B' и C' лежат соответственно на сторонах BC, CA и AB треугольника ABC. Известно, что $\angle AC'B' = \angle CA'B'$, $\angle CB'A' = \angle BC'A'$ и $\angle BA'C' = \angle AB'C'$. Докажите, что точки A', B' и C' — середины сторон треугольника ABC.

7.28. В квадрате отметили 10 точек и соединили их непересекающимися отрезками друг с другом и с вершинами квадрата так, что квадрат разбился на треугольники, на сторонах которых отмеченных точек нет. Сколько при этом получилось треугольников?

7.29. Внутри треугольника отметили n точек и соединили некоторые из них непересекающимися отрезками друг с другом и с вершинами треугольника так, что треугольник разбился на треугольники, на сторонах которых отмеченных точек нет. Сколько при этом получилось треугольников?

Глава 8

Медианы, биссектрисы и высоты треугольника

Каждая точка серединного перпендикуляра к отрезку равноудалена от концов этого отрезка.

Каждая точка, равноудалённая от концов отрезка, лежит на серединном перпендикуляре к этому отрезку.

Каждая точка биссектрисы неразвёрнутого угла равноудалена от его сторон. В частности, для любой точки X биссектрисы BD треугольника ABC перпендикуляры, проведённые из точки X к прямым AB и BC, равны.

Каждая точка, лежащая внутри неразвёрнутого угла и равноудалённая от его сторон, лежит на его биссектрисе. В частности, если точка X лежит внутри треугольника ABC и перпендикуляры, проведённые из неё к прямым AB и BC, равны, то точка X лежит на биссектрисе BD треугольника ABC.

Медиана AM треугольника ABC равна половине стороны BC тогда и только тогда, когда угол A прямой (пример 2, с. 17 и задача 7.2).

Пример 1 Докажите, что биссектрисы треугольника имеют общую точку.

Решение. Пусть биссектрисы AD и BE треугольника ABC пересекаются в точке O (рис. 39). Тогда точка O равноудалена от прямых AB и AC и от прямых BA и BC, поэтому она равноудалена от прямых CA и CB. При этом точка O лежит внутри треугольника ABC. Следовательно, она лежит на биссектрисе треугольника, проведённой из вершины C.

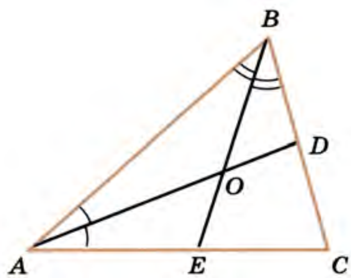


Рис. 39

Пример 2 Выразите угол между биссектрисой и высотой треугольника ABC, проведёнными из вершины C, через углы A и B.

Решение. Пусть CD — биссектриса треугольника ABC, CH — его высота. Если оба угла A и B острые и точка H лежит между точками A и D (рис. 40, *а*), то искомый угол равен $\frac{\angle C}{2} - 90° + \angle A = \frac{180° - \angle A - \angle B}{2} - 90° + \angle A =$ $= \frac{\angle A - \angle B}{2}$, если же точка H лежит между точками B и D, то искомый угол равен $\frac{\angle B - \angle A}{2}$. Если угол A тупой (рис. 40, *б*) или прямой, то искомый угол равен $\frac{\angle C}{2} - 90° + \angle A = \frac{\angle A - \angle B}{2}$, а если угол B тупой или прямой, то искомый угол равен $\frac{\angle B - \angle A}{2}$.

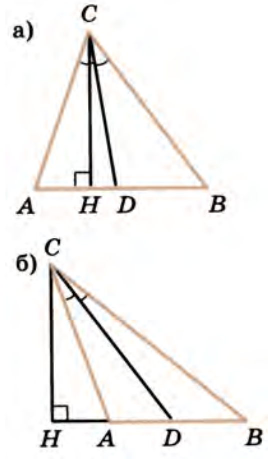


Рис. 40

Ответ: $\frac{|\angle A - \angle B|}{2}$.

Пример 3 На продолжении медианы BM треугольника ABC за точку M отмечена точка B_1 так, что $MB_1 = MB$ (рис. 41). Докажите, что $\triangle AB_1M = \triangle CBM$ и $\triangle CB_1M = \triangle ABM$.

Решение. В треугольниках AB_1M и CBM равны стороны AM и CM, стороны B_1M и BM и углы AMB_1 и CMB, заключённые между этими сторонами. Равенство треугольников CB_1M и ABM доказывается аналогично.

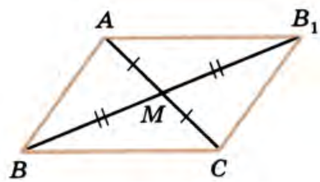


Рис. 41

Комментарий. Дополнительное построение, при котором на продолжении медианы BM треугольника ABC за точку M откладывается отрезок MB_1, равный медиане BM, часто используется при решении задач. Мы будем называть это построение *удвоением медианы*.

Задачи для самостоятельного решения

Медиана, перпендикулярная биссектрисе

8.1. Одна из сторон треугольника вдвое больше другой. Докажите, что одна из медиан этого треугольника перпендикулярна одной из биссектрис.

8.2. Одна из медиан треугольника перпендикулярна одной из его биссектрис. Докажите, что одна из сторон этого треугольника вдвое больше другой.

Биссектриса и высота

8.3. Может ли биссектриса остроугольного треугольника быть вдвое больше высоты, проведённой из той же вершины?

8.4. В треугольнике ABC биссектриса AD, высота BH и серединный перпендикуляр к стороне AB пересекаются в одной точке. Найдите угол A.

Медиана и высота

8.5. В треугольнике ABC проведены медиана AM и высота BH. Докажите, что $MH = \frac{1}{2}BC$.

8.6. В остроугольном треугольнике ABC проведены медиана AM и высота BH. Докажите, что если $\angle MCA = 2\angle MAC$, то $AH = HM$.

Биссектриса

8.7. В треугольнике ABC проведена биссектриса BD. Выразите угол ADB через углы A и C.

8.8. В равнобедренном треугольнике ABC с основанием AC проведена биссектриса AD и на стороне AB отмечена точка E так, что $BE = BD$. Докажите, что $ED = DC$.

8.9. В треугольнике ABC проведена биссектриса BD. Точка E отмечена так, что отрезки DE и AB пересекаются в некоторой точке K, $AE = CD$ и $\angle EAB = \angle ACB$. Докажите, что $EK = KD$.

Высоты

8.10. Высоты AA_1 и BB_1 треугольника ABC пересекаются в точке H. Докажите, что середина O отрезка CH равноудалена от точек A_1 и B_1.

8.11. Докажите, что: а) высоты остроугольного треугольника лежат внутри треугольника; б) для тупоугольного треугольника высота, проведённая из вершины тупого угла, лежит внутри треугольника, а высоты, проведённые из вершин острых углов, лежат вне треугольника.

8.12. Высота AH треугольника ABC не меньше стороны BC, а высота BD не меньше стороны AC. Найдите углы треугольника ABC.

Пересечение биссектрис треугольника в одной точке

8.13. Биссектрисы BB_1 и CC_1 треугольника ABC пересекаются в точке M, биссектрисы B_1B_2 и C_1C_2 треугольника AB_1C_1 пересекаются в точке N. Докажите, что точки A, M и N лежат на одной прямой.

8.14. Точки D и E лежат на продолжениях сторон AB и AC треугольника ABC за точки B и C, биссектрисы углов DBC и ECB пересекаются в точке O (рис. 42). Докажите, что биссектриса угла BAC проходит через точку O.

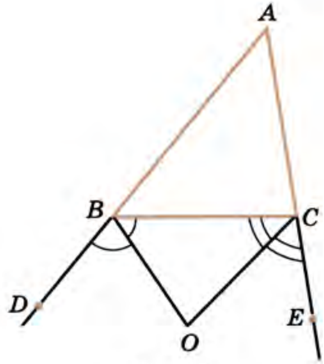


Рис. 42

8.15. На сторонах AB, BC и CA равностороннего треугольника ABC отмечены точки K, M и N так, что $\angle MKB = \angle MNC$ и $\angle KMB = \angle KNA$. Докажите, что луч NB — биссектриса угла KNM (рис. 43).

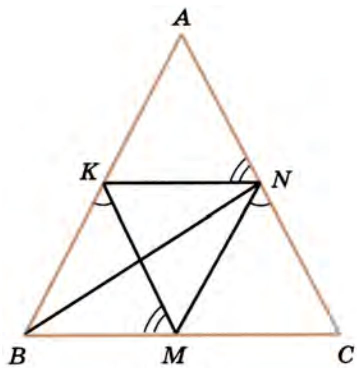


Рис. 43

8.16. В треугольнике ABC, в котором $\angle A = 120°$, проведены биссектрисы AA_1, BB_1 и CC_1. Докажите, что $\angle B_1A_1C_1 = 90°$.

8.17. Биссектрисы треугольника ABC, в котором $\angle A = 120°$, пересекаются в точке O. На лучах BA и CA отложены отрезки BP и CQ, равные стороне BC. Докажите, что $\angle POQ = 90°$.

8.18. Внутри равнобедренного треугольника ABC с основанием BC и углом A, равным $80°$, отмечена точка M так, что $\angle MBC = 30°$ и $\angle MCA = 10°$ (рис. 44). Найдите угол MAB.

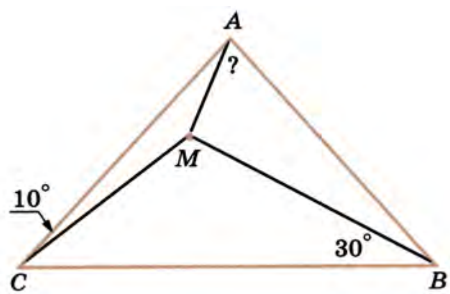


Рис. 44

8.19. Углы B и C треугольника ABC равны $70°$ и $50°$. На сторонах AB и AC отмечены точки M и N так, что $\angle MCB = 40°$ и $\angle NBC = 50°$ (рис. 45). Найдите угол NMC.

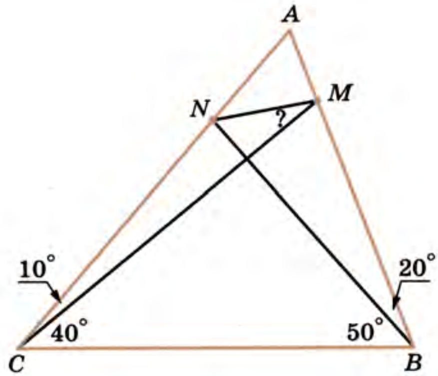


Рис. 45

Удвоение медианы

8.20. На медиане BM треугольника ABC отмечена точка D так, что $\angle CDM = \angle ABM$. Докажите, что $CD = AB$.

8.21. Сумма углов A и C треугольника ABC, в котором проведена медиана BM, равна углу ABM. Докажите, что $BC = 2BM$.

8.22. Докажите равенство треугольников по двум сторонам и медиане, проведённой к третьей стороне.

8.23. Докажите равенство треугольников по медиане и углам, на которые медиана разбивает угол треугольника.

8.24. Медиана BM треугольника ABC вдвое меньше стороны AB, $\angle ABM = 40°$. Найдите угол ABC.

8.25. Медиана BM треугольника ABC в 4 раза меньше стороны AB, $\angle ABM = 60°$. Найдите угол ABC.

Равные отрезки биссектрис

8.26. Угол B треугольника ABC равен $60°$, биссектрисы AD и CE пересекаются в точке O. Докажите, что $OD = OE$.

8.27. В треугольнике ABC углы при вершинах B и C равны $40°$, BD — биссектриса угла B. Докажите, что $BD + DA = BC$.

8.28. Биссектрисы AD и CE треугольника ABC пересекаются в точке O. Докажите, что если $OD = OE$, то либо этот треугольник равнобедренный, либо его угол B равен $60°$.

Окружность и круг

Окружностью называют фигуру, состоящую из всех точек, расположенных на заданном расстоянии от данной точки. Данную точку называют *центром* окружности, а заданное расстояние — *радиусом* окружности.

Отрезок, соединяющий две точки окружности и проходящий через центр окружности, называют *диаметром*. Диаметр окружности вдвое больше радиуса.

Отрезок, соединяющий две точки окружности, называют *хордой*.

Круг — это часть плоскости, ограниченная окружностью.

Угол, вершина которого лежит на окружности, а стороны проходят через концы диаметра, прямой.

Если диаметром окружности является гипотенуза прямоугольного треугольника, то вершина прямого угла этого треугольника лежит на окружности.

Пример 1 Докажите, что прямая не может пересекать окружность в трёх точках.

Решение. Предположим, что три точки A, B, C окружности с центром O лежат на прямой l. Тогда точка O лежит на серединном перпендикуляре к отрезку AB и на серединном перпендикуляре к отрезку BC. Середины отрезков AB и BC не совпадают, поэтому из точки O можно провести два перпендикуляра к прямой l. Это противоречит тому, что из данной точки можно провести только один перпендикуляр к данной прямой, поэтому предположение неверно.

Пример 2 Докажите, что можно провести окружность, проходящую через все вершины данного прямоугольника.

Решение. Рассмотрим окружность, диаметром которой служит диагональ AC прямоугольника $ABCD$. Углы ABC и ADC прямые, поэтому точки B и D лежат на этой окружности.

Пример 3 Докажите, что окружность, построенная на стороне равностороннего треугольника как на диаметре, проходит через середины двух других его сторон.

Решение. Середины M и N сторон AC и BC равностороннего треугольника ABC являются основаниями высот, проведённых из вершин B и A. Поэтому углы AMB и ANB прямые, а значит, точки M и N лежат на окружности, построенной на отрезке AB как на диаметре.

Задачи для самостоятельного решения

Концы хорды равноудалены от центра окружности

9.1. Окружности с центрами O_1 и O_2 пересекаются в точках A и B. Докажите, что $O_1O_2 \perp AB$.

9.2. Докажите, что две окружности не могут пересекаться в трёх точках.

9.3. Две окружности имеют общий центр. Прямая пересекает обе окружности. Докажите, что отрезки этой прямой, заключённые между окружностями, равны.

9.4. Диаметр окружности проходит через середину хорды. Докажите, что эта хорда либо перпендикулярна диаметру, либо сама является диаметром.

9.5. Две хорды окружности делят друг друга пополам. Докажите, что их общая точка — центр окружности.

9.6. Диаметр окружности пересекает хорду под углом 45° и делит её на отрезки, равные 5 и 11. Найдите расстояние от центра окружности до хорды.

9.7. Хорда пересекает диаметр окружности под углом 30° и делит его на отрезки, равные 5 и 13. Найдите расстояние от центра окружности до хорды.

Равные прямоугольные треугольники в окружности

9.8. Докажите, что хорды окружности, удалённые от её центра на равные расстояния, равны.

9.9. Через точку P проведены две прямые, на которых окружность высекает равные хорды AB и CD (точка A лежит между P и B, точка C лежит между P и D). Докажите, что $PA = PC$.

Перпендикулярные хорды

9.10. Две пересекающиеся хорды окружности взаимно перпендикулярны. Докажите, что расстояние от точки их пересечения до центра окружности равно расстоянию между их серединами.

9.11. Две перпендикулярные хорды окружности пересекаются, и каждая из них делится точкой пересечения на два отрезка длиной 3 и 7. Найдите расстояние от центра окружности до каждой из этих хорд.

Угол, опирающийся на диаметр

9.12. Докажите, что окружность, построенная на боковой стороне равнобедренного треугольника как на диаметре, проходит через середину основания.

9.13. Окружность, построенная на стороне треугольника как на диаметре, проходит через середину другой стороны. Докажите, что этот треугольник равнобедренный.

9.14. Окружность, построенная на стороне треугольника как на диаметре, высекает на двух других сторонах треугольника равные отрезки. Докажите, что этот треугольник равнобедренный.

9.15. Окружность, построенная на биссектрисе AD треугольника ABC как на диаметре, пересекает стороны AB и AC в точках M и N, отличных от точки A. Докажите, что $AM = AN$.

9.16. В прямоугольном треугольнике ABC катет AC равен 6 и $\angle A = 30°$. Окружность с диаметром AC пересекает гипотенузу AB в точке K. Найдите CK.

9.17. Окружность, построенная на катете прямоугольного треугольника как на диаметре, делит гипотенузу пополам. Найдите острые углы треугольника.

9.18. Окружности, построенные на сторонах AB и AC треугольника ABC как на диаметрах, пересекаются в точке D, отличной от точки A. Докажите, что точка D лежит на прямой BC.

9.19. В треугольнике ABC проведены высоты AA_1 и BB_1. Докажите, что середина стороны AB равноудалена от точек A_1 и B_1.

9.20. На сторонах AB и BC квадрата $ABCD$ отмечены точки P и Q так, что $BP = BQ$, из точки B проведён перпендикуляр BH к прямой CP. Докажите, что угол DHQ прямой (рис. 46).

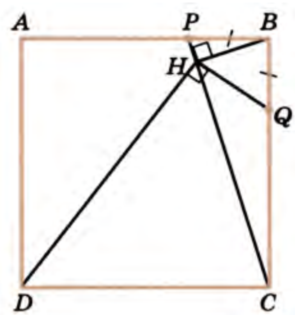


Рис. 46

Количество частей

9.21. На какое число частей могут разбивать круг две хорды?

9.22. На какое число частей могут разбивать круг три хорды?

9.23. На какое наибольшее и какое наименьшее число частей могут разбивать круг четыре хорды?

9.24. На какое наибольшее число областей могут разбивать плоскость три окружности?

9.25. На какое наибольшее число областей могут разбивать плоскость четыре окружности?

Глава 10

Задачи на построение

С помощью линейки можно построить прямую, проходящую через две данные точки.

С помощью циркуля можно построить окружность с центром в данной точке и радиусом, равным данному отрезку.

Под построениями подразумеваются построения с помощью циркуля и линейки. Если имеются в виду построения, использующие другой набор инструментов, то это специально оговаривается.

Базовые задачи на построение, которыми можно пользоваться без пояснений (но при этом нужно уметь их решать):

- на данном луче от его начала отложить отрезок, равный данному;
- построить треугольник по трём сторонам;
- отложить от данного луча угол, равный данному углу;
- построить биссектрису данного неразвёрнутого угла;
- построить серединный перпендикуляр к данному отрезку;
- построить прямую, проходящую через данную точку и перпендикулярную данной прямой.

Помимо циркуля и линейки, при построениях могут использоваться другие инструменты (их использование всегда оговаривается). Мы приведём несколько задач на построение с помощью прямоугольного чертёжного угольника.

Пример 1 Нарисована окружность, но её центр не отмечен. Постройте центр этой окружности.

Решение. Отметим на окружности три точки A, B и C. Центр окружности — это точка пересечения серединных перпендикуляров к отрезкам AB и BC.

Пример 2 Постройте треугольник ABC по стороне AB, углу A и сумме сторон $AC + CB$.

Решение. Продолжим сторону AC треугольника ABC на отрезок CD, равный стороне BC (рис. 47). В треугольнике ABD известны стороны AB и $AD = AC + CB$ и угол A между ними, поэтому его можно построить. Серединный перпендикуляр к стороне BD пересекает сторону AD в искомой точке C.

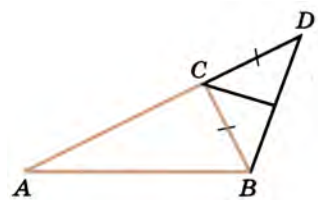


Рис. 47

Пример 3 Постройте прямоугольный треугольник по гипотенузе и катету.

Решение. Сначала построим окружность, диаметром которой служит данная гипотенуза AB, а затем построим окружность с центром A, радиус которой равен данному катету. Точки C_1 и C_2, в которых пересекаются построенные окружности (рис. 48), являются вершинами искомых треугольников ABC_1 и ABC_2.

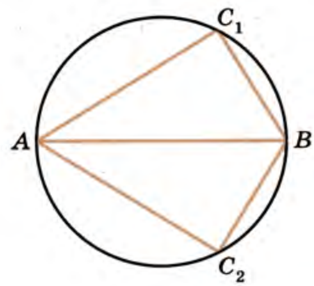


Рис. 48

Задачи для самостоятельного решения

Применение базовых задач

10.1. Постройте треугольник ABC по сторонам AB и BC и углу A.

10.2. Впишите в данную окружность: а) квадрат; б) равносторонний треугольник.

Продолжение отрезка

10.3. Постройте треугольник ABC по стороне BC, сумме сторон $AB + AC$ и разности углов $\angle C - \angle B$.

10.4. Постройте прямоугольный треугольник: а) по катету и сумме гипотенузы и другого катета; б) по гипотенузе и сумме катетов.

10.5. Постройте треугольник по периметру и двум углам.

Комментарий. Отрезок AB можно продолжить на данный отрезок CD, т. е. отложить на луче AB отрезок AF, равный $AB + CD$. Можно также уменьшить отрезок AB на данный отрезок CD (если $AB > CD$), т. е. отложить на луче AB отрезок AF, равный $AB - CD$. В обоих случаях $BF = CD$. Уменьшение отрезка используется при решении задачи 10.6.

10.6. Постройте треугольник ABC по углам A и B и разности сторон $AC - BC > 0$.

Удвоение медианы

10.7. Постройте треугольник по двум сторонам и медиане, проведённой к третьей стороне.

10.8. Постройте треугольник по медиане и двум углам, на которые она разбивает угол треугольника.

Угол, опирающийся на диаметр

10.9. Постройте треугольник ABC: а) по стороне AB, медиане CM и высоте CH; б) по углу A, биссектрисе AD и высоте AH; в) по стороне AB, высоте AH и медиане AM; г) по сторонам AB, AC и высоте AH.

10.10. Внутри окружности даны две точки. Постройте прямоугольный треугольник, вершины которого лежат на окружности, а катеты проходят через данные точки.

10.11. Постройте треугольник ABC по прямой l, на которой лежит сторона AB, и точкам A_1 и B_1 — основаниям высот, проведённых из вершин A и B.

10.12. Продолжения сторон AB и CD прямоугольника $ABCD$ пересекают некоторую прямую в точках M и N, а продолжения сторон AD и BC пересекают ту же прямую в точках P и Q. Постройте прямоугольник $ABCD$, если даны точки M, N, P, Q и длина a стороны AB.

Построения с помощью чертёжного угольника

Прямоугольный чертёжный угольник позволяет выполнить следующие элементарные построения:

а) расположить прямой угол так, чтобы одна его сторона лежала на данной прямой, а другая сторона проходила через данную точку;

б) расположить прямой угол так, чтобы его вершина лежала на данной прямой, а стороны проходили через две данные точки.

Расположив прямой угол одним из указанных способов, можно провести лучи, соответствующие его сторонам. В частности, можно построить вершину этого прямого угла.

10.13. Нарисована окружность, но её центр не отмечен. С помощью одного лишь чертёжного угольника постройте центр этой окружности.

10.14. С помощью одного лишь чертёжного угольника постройте середину данного отрезка AB.

10.15. Дан отрезок AB. С помощью одного лишь чертёжного угольника постройте отрезок AC, серединой которого является точка B.

10.16. Дан угол AOB. С помощью одного лишь чертёжного угольника постройте угол, вдвое больший угла AOB.

10.17. Дан угол AOB. С помощью одного лишь чертёжного угольника постройте угол, вдвое меньший угла AOB.

Глава 11

Параллельные прямые

Две прямые на плоскости называют *параллельными*, если они не пересекаются.

Две прямые, перпендикулярные некоторой прямой, параллельны. Это следует из того, что из точки можно провести только один перпендикуляр к прямой. Поэтому через точку, не лежащую на данной прямой, проходит прямая, параллельная данной. (Параллельная прямая существует.)

Через точку, не лежащую на данной прямой, проходит прямая, параллельная данной, и притом только одна.

Если при пересечении двух прямых секущей *накрест лежащие* углы равны (рис. 49), то эти прямые параллельны. Если две параллельные прямые пересечены секущей, то накрест лежащие углы равны.

Если при пересечении двух прямых секущей *соответственные* углы равны (рис. 50), то эти прямые параллельны. Если две параллельные прямые пересечены секущей, то соответственные углы равны.

Если при пересечении двух прямых секущей сумма *односторонних* углов (рис. 51) равна 180°, то эти прямые параллельны. Если две параллельные прямые пересечены секущей, то сумма односторонних углов равна 180°.

Все точки каждой из двух параллельных прямых равноудалены от другой прямой. Расстояние от произвольной точки одной из параллельных прямых до другой прямой называют *расстоянием* между этими прямыми. Множество всех точек плоскости, расположенных по одну сторону от данной прямой и равноудалённых от неё, есть прямая, параллельная данной.

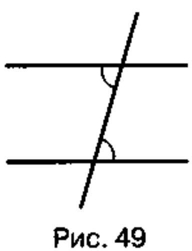


Рис. 49

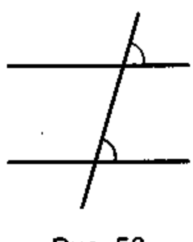


Рис. 50

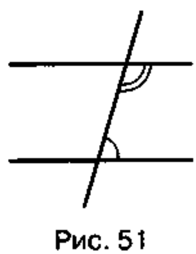


Рис. 51

Пример 1 В треугольнике ABC проведена биссектриса AD и на стороне AB отмечена точка E так, что $ED \parallel AC$. Докажите, что $AE = ED$.

Решение. Биссектриса AD делит угол A пополам, поэтому $\angle EAD = \angle DAC$. Накрест лежащие углы $\angle DAC$ и $\angle EDA$ равны. Следовательно, $\angle EAD = \angle EDA$. Таким образом, треугольник ADE равнобедренный и $AE = ED$.

Пример 2 На плоскости проведено 5 прямых, никакие две из которых не параллельны. Докажите, что две из этих прямых образуют угол, не превосходящий 36°.

Решение. Проведём через некоторую точку прямые, параллельные данным прямым. Эти прямые разделяют плоскость на 5 пар вертикальных углов, поэтому угол между некоторыми двумя из этих прямых не превосходит $\frac{360^\circ}{10} = 36^\circ$.

Прямые, параллельные этим двум прямым, тоже образуют угол, не превосходящий 36°.

Пример 3 Через данную точку A проведите прямую, параллельную данной прямой a.

Решение. Сначала проведём перпендикуляр AH к прямой a, а затем через точку A проведём перпендикуляр к прямой AH (рис. 52). При пересечении прямой a и построенной прямой секущей AH образуются прямые углы, поэтому эти прямые параллельны.

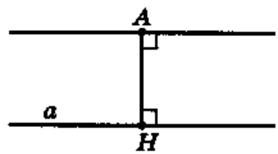


Рис. 52

Пример 4 Через данную точку проведите прямую, образующую равные углы с двумя данными пересекающимися прямыми.

Решение. Прямые, проходящие через вершину угла, образованного данными прямыми, и образующие с этими прямыми равные углы, — это биссектрисы углов, образованных данными прямыми. Поэтому искомая прямая проходит через данную точку параллельно одной из биссектрис.

Задача имеет два решения.

Задачи для самостоятельного решения

Точки пересечения прямых

11.1. Могут ли четыре прямые иметь ровно пять точек пересечения?

11.2. Могут ли четыре прямые иметь ровно три точки пересечения?

11.3. Могут ли четыре прямые, ровно две из которых параллельны, иметь ровно три точки пересечения?

11.4. Могут ли семь прямых пересекаться ровно в девяти точках?

11.5. Можно ли расположить на плоскости девять прямых так, чтобы каждая из них пересекала ровно шесть других?

Биссектриса

11.6. Биссектрисы углов B и C треугольника ABC пересекаются в точке O. На стороне BC отмечены точки D и E так, что $DO \parallel AB$ и $EO \parallel AC$. Докажите, что периметр треугольника OED равен отрезку BC.

11.7. Биссектрисы углов B и C треугольника ABC пересекаются в точке O. Прямая, проходящая через точку O параллельно стороне BC, пересекает стороны AB и AC в точках P и Q. Докажите, что $PQ = BP + CQ$.

11.8. Секущая пересекает параллельные прямые a и b в точках A и B. Биссектрисы образовавшихся углов с вершиной B пересекают прямую a в точках C и D. Докажите, что точка A — середина отрезка CD.

11.9. Через точку пересечения биссектрисы угла B треугольника ABC и биссектрисы внешнего угла с вершиной C проведена прямая, параллельная стороне BC. Она пересекает прямые AB и AC в точках M и N. Докажите, что $MN = |BM - CN|$.

11.10. Биссектриса внешнего угла треугольника ABC с вершиной A параллельна стороне BC. Докажите, что этот треугольник равнобедренный.

11.11. На стороне BC треугольника ABC отмечена точка E, а на биссектрисе BD — точка F так, что $EF \parallel AC$ и $AF = AD$ (рис. 53). Докажите, что $AB = BE$.

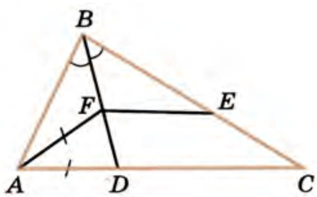


Рис. 53

11.12. В равнобедренном треугольнике ABC с основанием AC проведены биссектрисы AD и CE. Докажите, что $AE = ED = DC$.

11.13. В треугольниках ABC и $A_1B_1C_1$ проведены биссектрисы CD и C_1D_1. Известно, что $AB = A_1B_1$, $CD = C_1D_1$ и $\angle ADC = \angle A_1D_1C_1$. Докажите, что треугольники ABC и $A_1B_1C_1$ равны.

Разные задачи

11.14. При пересечении прямых a и b секущей образовались восемь углов, четыре из которых равны $70°$, а четыре других равны $110°$. Обязательно ли прямые a и b параллельны?

11.15. При пересечении прямых a и b секущей образовались восемь равных углов. Обязательно ли прямые a и b параллельны?

11.16. Даны две прямые a и b. Докажите, что если любая прямая, пересекающая прямую a, пересекает и прямую b, то $a \parallel b$.

11.17. На сторонах AB и AC остроугольного треугольника ABC как на диаметрах построены окружности. Прямая, проходящая через вершину A параллельно стороне BC, пересекает эти окружности в точках M и N. Докажите, что $MN = BC$.

11.18. На стороне BC равностороннего треугольника ABC отмечена точка M, а на продолжении стороны AC за точку C отмечена точка N так, что $AM = MN$. Докажите, что $BM = CN$.

11.19. В остроугольном треугольнике ABC проведена высота CH. Докажите, что если $AH = BC$, то биссектриса угла B, высота AD и прямая, проходящая через точку H параллельно стороне BC, пересекаются в одной точке.

Построения

11.20. Постройте треугольник ABC по стороне AB, высоте CH и медиане AM.

11.21. Постройте равнобедренный треугольник, если заданы три точки — основания его биссектрис.

11.22. На стороне OA острого угла AOB отмечена точка C. Постройте на этой же стороне точку D, равноудалённую от точки C и прямой OB.

Глава 12

Параллелограмм и трапеция

Параллелограмм — это четырёхугольник, противоположные стороны которого попарно параллельны. ***Ромб*** — это параллелограмм, все стороны которого равны.

Противоположные стороны параллелограмма равны. Противоположные углы параллелограмма равны.

Диагонали параллелограмма пересекаются и делятся точкой пересечения пополам. Если диагонали четырёхугольника пересекаются и делятся точкой пересечения пополам, то этот четырёхугольник — параллелограмм.

Если две стороны четырёхугольника равны и параллельны, то этот четырёхугольник — параллелограмм.

Если стороны четырёхугольника попарно равны, то этот четырёхугольник — параллелограмм.

Диагонали ромба перпендикулярны и делят его углы пополам. Если диагонали параллелограмма перпендикулярны, то этот параллелограмм — ромб. Если диагональ параллелограмма делит угол пополам, то этот параллелограмм — ромб.

Трапеция — это четырёхугольник, две стороны которого параллельны, а две другие стороны не параллельны. Параллельные стороны трапеции называют её *основаниями*, а две другие стороны — *боковыми сторонами*. Трапецию, боковые стороны которой равны, называют *равнобедренной*.

Высота трапеции — это перпендикуляр, проведённый из точки одного основания к прямой, содержащей другое основание. Длину этого перпендикуляра тоже называют высотой трапеции.

Пример 1 На сторонах BC и AD параллелограмма $ABCD$ отмечены точки K и M так, что $BK = DM$. Отрезки AK и BM пересекаются в точке L, а отрезки CM и DK пересекаются в точке N. Докажите, что треугольники ABL и CDN равны.

Решение. Треугольники ABK и CDM равны по двум сторонам и углу между ними (рис. 54), поэтому $\angle BAK = \angle DCM$. Аналогично $\angle ABM = \angle CDK$. Поэтому треугольники ABL и CDN равны по стороне ($AB = CD$) и прилегающим к ней углам.

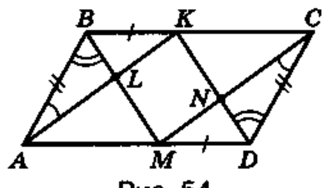


Рис. 54

Пример 2 Докажите, что если точка пересечения диагоналей параллелограмма равноудалена от его сторон, то этот параллелограмм — ромб.

Решение. Точка пересечения диагоналей этого параллелограмма лежит на биссектрисе каждого из его углов. Поэтому диагонали параллелограмма делят его углы пополам.

Пример 3 Биссектрисы углов при одном основании трапеции пересекаются в точке, лежащей на другом её основании. Докажите, что основание, на котором лежит точка пересечения биссектрис, равно сумме боковых сторон.

Решение. Пусть биссектрисы углов при основании BC трапеции $ABCD$ пересекают основание AD в точке K (рис. 55). Тогда $\angle ABK = \angle KBC = \angle AKB$, поэтому $AK = AB$. Аналогично $KD = CD$, следовательно, $AD = AK + KD = AB + CD$.

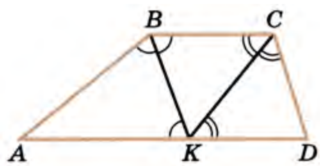


Рис. 55

Пример 4 Докажите, что если прямая, соединяющая середины оснований трапеции, перпендикулярна основаниям, то эта трапеция равнобедренная.

Решение. Пусть AD — основание трапеции $ABCD$, BB_1 и CC_1 — высоты трапеции, M и N — середины оснований BC и AD. Тогда $B_1N = BM = CM = C_1N$ и $AB_1 = |AN - B_1N| = |ND - C_1N| = DC_1$. Поэтому прямоугольные треугольники ABB_1 и DCC_1 равны по двум катетам и, следовательно, их гипотенузы AB и CD равны.

Задачи для самостоятельного решения

Параллелограмм

12.1. Биссектриса угла A параллелограмма $ABCD$ пересекает сторону BC в точке M, а биссектриса угла AMC проходит через вершину D. Найдите углы параллелограмма, если известно, что $\angle MDC = 45°$.

12.2. На каждой стороне одного параллелограмма лежит ровно одна вершина другого параллелограмма. Докажите, что эти параллелограммы имеют общую точку пересечения диагоналей.

12.3. На плоскости отмечены точки A, B, C и D, никакие три из которых не лежат на одной прямой. Известно, что $AB = CD$ и $BC = AD$. Верно ли, что: а) $AB \parallel CD$? б) $\angle ABC = \angle ADC$?

12.4. Из точки M основания BC равнобедренного треугольника ABC проведены перпендикуляры MB_1 и MC_1 к прямым AC и AB, BH — высота этого треугольника. Докажите, что $MB_1 + MC_1 = BH$.

12.5. Внутри данного угла отмечена точка. Постройте отрезок с концами на сторонах угла, который делится этой точкой пополам.

12.6. На сторонах BC и CD параллелограмма $ABCD$ построены внешним образом равносторонние треугольники BCK и DCL (рис. 56). Докажите, что треугольник AKL равносторонний.

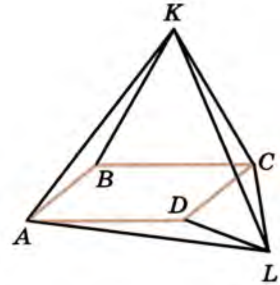


Рис. 56

12.7. На сторонах параллелограмма внешним образом построены квадраты. Докажите, что их центры образуют квадрат.

12.8. На боковых сторонах AB и AC равнобедренного треугольника ABC отмечены точки K и L так, что $AK = LC$ и $\angle ALK + \angle LKB = 60°$. Докажите, что $KL = BC$.

Ромб

12.9. В треугольнике ABC проведена биссектриса AD. Прямые, проходящие через точку D параллельно AB и AC, пересекают стороны AC и AB в точках K и L. Докажите, что $KL \perp AD$.

12.10. В данный треугольник ABC впишите ромб так, чтобы одной из вершин ромба была точка A, а три остальные вершины лежали по одной на каждой стороне треугольника.

12.11. Из вершины тупого угла A ромба $ABCD$ проведён перпендикуляр AH к прямой BC. Может ли точка H лежать не на стороне BC, а на её продолжении?

12.12. Три окружности одного радиуса проходят через одну точку. Докажите, что треугольник с вершинами в остальных их точках пересечения равен треугольнику с вершинами в их центрах.

Трапеция

12.13. Длина стороны AB трапеции $ABCD$ с прямым углом A равна сумме длин оснований AD и BC. В каком отношении биссектриса угла A делит сторону CD?

12.14. Сумма углов при основании трапеции равна 90°. Докажите, что отрезок, соединяющий середины оснований, равен полуразности оснований.

Равнобедренная трапеция

12.15. Диагонали четырёхугольника $ABCD$ пересекаются в точке O, $OB = OC$ и $\angle ABD = \angle ACD$. Докажите, что этот четырёхугольник — равнобедренная трапеция или прямоугольник.

12.16. Острый угол равнобедренной трапеции равен 60°. Докажите, что меньшее основание равно разности большего основания и боковой стороны.

12.17. Основания равнобедренной трапеции видны из точки пересечения диагоналей под углом 60°. Докажите, что диагональ равна сумме оснований.

12.18. Диагонали равнобедренной трапеции взаимно перпендикулярны. Докажите, что высота трапеции равна полусумме оснований.

12.19. Докажите, что если диагонали трапеции равны, то эта трапеция равнобедренная.

12.20. Одна из диагоналей трапеции равна сумме оснований, а угол между диагоналями равен 60°. Докажите, что эта трапеция равнобедренная.

12.21. Биссектриса AD равнобедренного треугольника ABC с основанием AC вдвое больше биссектрисы BE. Найдите углы треугольника ABC.

12.22. Найдите углы трапеции, боковые стороны которой равны меньшему основанию, а диагонали — большему.

12.23. Существует ли трапеция, каждая диагональ которой разделяет её на два равнобедренных треугольника?

Теорема Фалеса. Средняя линия треугольника

Средней линией треугольника **называют отрезок, соединяющий середины двух его сторон.**

Средняя линия треугольника, соединяющая середины двух его сторон, параллельна третьей стороне и равна половине этой стороны.

Средней линией трапеции **называют отрезок, соединяющий середины её боковых сторон.**

Средняя линия трапеции параллельна основаниям и равна их полусумме.

Теорема Фалеса. Если на одной из сторон угла от его вершины отложить последовательно несколько равных отрезков и через их концы провести параллельные прямые, пересекающие другую сторону угла, то они отсекут на второй стороне равные между собой отрезки.

Медианы треугольника пересекаются в одной точке, которая делит каждую медиану в отношении 2 : 1, считая от вершины.

Пример 1 Докажите, что средняя линия треугольника ABC, параллельная стороне BC, и медиана AM делят друг друга пополам.

Решение. Пусть B_1 и C_1 — середины сторон AC и AB. Тогда противоположные стороны четырёхугольника AB_1MC_1 параллельны, поэтому этот четырёхугольник — параллелограмм. Его диагонали AM и B_1C_1 делятся точкой пересечения пополам.

Пример 2 Основания трапеции равны a и b. Найдите длину отрезка, высекаемого диагоналями трапеции на средней линии.

Решение. Пусть AD — основание трапеции $ABCD$, K — середина стороны AB, M и N — точки, в которых диагонали AC и BD пересекают среднюю линию трапеции (рис. 57). Тогда KM и KN —

средние линии треугольников ABC и ABD, поэтому $KM = \frac{BC}{2}$ и $KN = \frac{AD}{2}$. Следовательно, $MN = |KN - KM| = \frac{|AD - BC|}{2}$.

Ответ: $\frac{|a-b|}{2}$.

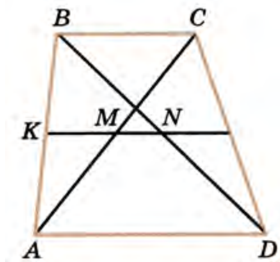


Рис. 57

Пример 3 На стороне AD параллелограмма $ABCD$ отмечена точка P так, что $AD = n \cdot AP$, где число n целое, Q — точка пересечения отрезков AC и BP. Докажите, что $AC = (n+1)AQ$.

Решение. Разделим каждую из сторон AD и BC на n равных частей и через точки деления проведём прямые, параллельные отрезку PB (рис. 58). Из теоремы Фалеса следует, что эти прямые делят диагональ AC на $n+1$ равных частей.

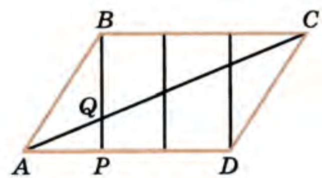


Рис. 58

Задачи для самостоятельного решения

Средняя линия треугольника

13.1. Гипотенуза прямоугольного треугольника равна 1, а один из его углов равен 15°. Найдите высоту, проведённую к гипотенузе.

13.2. Биссектриса угла A треугольника ABC пересекает в точке K прямую, проходящую через середины A_1 и C_1 сторон BC и AB. Докажите, что $2A_1K = |AB - AC|$.

13.3. Постройте треугольник по серединам его сторон.

13.4. На гипотенузе AB прямоугольного треугольника ABC отмечена точка K так, что $CK = CB$. Отрезок CK делит биссектрису AL пополам. Найдите угол A.

13.5. В треугольнике ABC, угол C которого равен 60°, проведены высоты AA_1 и BB_1. Докажите, что $A_1B_1 = \frac{1}{2}AB$.

13.6. Высота AH треугольника ABC равна его медиане BM. Найдите угол CBM.

13.7. На стороне AB треугольника ABC отмечены точки K и L так, что $AK = LB$ и $KL = BC$. Докажите, что из середины M стороны AC отрезок KL виден под прямым углом.

13.8. Докажите, что середины сторон произвольного четырёхугольника — вершины параллелограмма. Для каких четырёхугольников этот параллелограмм является прямоугольником, для каких — ромбом, для каких — квадратом?

13.9. Точки P и Q — середины сторон AB и CD четырёхугольника $ABCD$, M и N — середины диагоналей AC и BD. Докажите, что если $MN \perp PQ$, то $AD = BC$.

13.10. В равнобедренном треугольнике ABC с основанием AC проведена биссектриса CD. Прямая, проходящая через точку D перпендикулярно прямой DC, пересекает прямую AC в точке E. Докажите, что $EC = 2AD$.

13.11. Точка N — середина гипотенузы AB прямоугольного треугольника ABC, точка M делит катет AC в отношении $CM : MA = 1 : 2$. Докажите, что $\angle BMC = \angle NMA$.

13.12. Разрежьте треугольник на две части, из которых можно сложить параллелограмм.

13.13. Из вершины A треугольника ABC проведены перпендикуляры AB_1 и AC_1 к биссектрисам внешних углов B и C. Докажите, что отрезок B_1C_1 равен половине периметра треугольника ABC.

13.14. Докажите, что основания перпендикуляров, проведённых из вершины A треугольника ABC к биссектрисам внешних и внутренних углов с вершинами B и C, лежат на одной прямой.

13.15. Точка E — середина стороны AD параллелограмма $ABCD$, точка F — основание перпендикуляра, проведённого из точки B к прямой CE. Докажите, что треугольник ABF равнобедренный.

13.16. Диагонали параллелограмма $ABCD$ пересекаются в точке O. На продолжении стороны AB за точку B отмечена точка M так, что $\angle AMO = \angle MAD$. Докажите, что точка M равноудалена от точек C и D.

13.17. На катетах CA и CB равнобедренного прямоугольного треугольника ABC отмечены точки D и E так, что $CD = CE$. Продолжения перпендикуляров, проведённых из точек D и C к прямой AE, пересекают гипотенузу AB в точках K и L. Докажите, что $KL = LB$.

Точка пересечения медиан

13.18. Докажите, что если две медианы треугольника равны, то этот треугольник равнобедренный.

13.19. Докажите равенство треугольников по трём медианам.

13.20. Постройте треугольник по трём медианам.

13.21. Медианы AA_1, BB_1 и CC_1 треугольника ABC пересекаются в точке M. Докажите, что медианы треугольника $A_1B_1C_1$ тоже пересекаются в точке M.

Средняя линия трапеции

13.22. Докажите, что проекция диагонали равнобедренной трапеции на основание равна средней линии.

13.23. Средняя линия трапеции делится диагоналями на три равные части. Найдите большее основание, если меньшее основание равно 6.

13.24. В остроугольном треугольнике ABC проведены высоты AA_1 и CC_1. Из точек A и C проведены перпендикуляры AA_2 и CC_2 к прямой A_1C_1. Докажите, что $A_1C_2 = C_1A_2$.

13.25. Одна из боковых сторон трапеции равна сумме оснований. Докажите, что биссектрисы углов при этой стороне пересекаются на другой стороне.

13.26. Дана трапеция $ABCD$ с основанием AD. Биссектрисы углов, смежных с углами A и B трапеции, пересекаются в точке P, а биссектрисы углов, смежных с углами C и D, — в точке Q. Докажите, что длина отрезка PQ равна половине периметра трапеции.

13.27. Дана трапеция $ABCD$ с основанием AD. Биссектрисы углов A и B трапеции пересекаются в точке P, а биссектрисы углов C и D — в точке Q. Докажите, что $PQ = \frac{1}{2}|AD + BC - AB - CD|$.

Теорема Фалеса

13.28. Отношение оснований трапеции равно $p : q$, где p и q — целые числа. В каком отношении диагонали трапеции делятся точкой их пересечения?

13.29. На сторонах AB и AC треугольника ABC отмечены точки B_1 и C_1, делящие стороны в отношении $p : q$ (p и q — целые числа), считая от вершины A. Найдите отношение $B_1C_1 : BC$.

13.30. На сторонах AB, BC и CA треугольника ABC отмечены точки D, E и F так, что $BE = 2CE$, $CF = 2AF$ и $DF \perp FE$. Докажите, что луч DF — биссектриса угла ADE.

13.31. На сторонах AB, BC, CD и DA четырёхугольника $ABCD$ отмечены точки K, L, M и N так, что $AK : KB = CL : LB = DM : MC = DN : NA = p : q$, где p и q — целые числа. Отрезки KM и LN пересекаются в точке O. Найдите отношение $KO : OM$.

Вписанный угол

Две точки, лежащие на окружности, разделяют её на две части, каждую из которых называют *дугой* окружности.

Угол с вершиной в центре окружности называют *центральным углом*.

Угол, вершина которого лежит на окружности, а стороны пересекают окружность, называют *вписанным*.

Вписанный угол измеряется половиной дуги, на которую он опирается.

Вписанные углы, опирающиеся на хорду AB, равны, если их вершины лежат по одну сторону от прямой AB, и составляют в сумме 180°, если их вершины лежат по разные стороны от прямой AB.

Если точки C и D лежат по одну сторону от прямой AB и $\angle ACB = \angle ADB$, то точки A, B, C и D лежат на одной окружности. Если точки C и D лежат по разные стороны от прямой AB и $\angle ACB + \angle ADB = 180°$, то точки A, B, C и D лежат на одной окружности.

Пример 1 В остроугольном треугольнике ABC проведены высоты AA_1 и BB_1. Докажите, что $\angle AA_1B_1 = \angle ABB_1$.

Решение. Точки A_1 и B_1 лежат на окружности с диаметром AB. Точки A_1 и B лежат по одну сторону от прямой AB_1, поэтому вписанные углы AA_1B_1 и ABB_1 равны.

Пример 2 Вершины трапеции расположены на окружности. Докажите, что эта трапеция равнобедренная.

Решение. Пусть вершины трапеции $ABCD$ с основаниями AD и BC лежат на окружности. Тогда накрест лежащие углы ADB и CBD, образованные при пересечении параллельных прямых секущей, равны (рис. 59).

Хорды, на которые опираются равные углы, равны. Поэтому хорды AB и CD, на которые опираются равные вписанные углы ADB и CBD, равны.

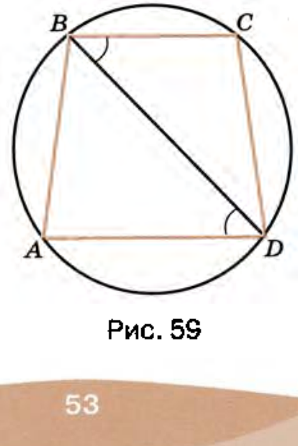


Рис. 59

Пример 3 Угол A остроугольного треугольника ABC равен $60°$, BP и CQ — высоты этого треугольника, M — середина стороны BC. Докажите, что треугольник PQM равносторонний.

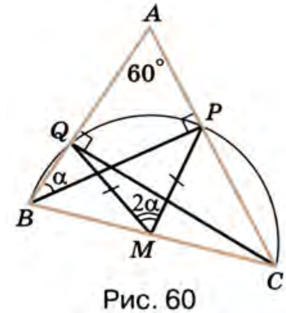


Рис. 60

Решение. Пусть $\angle PBQ = \alpha$. Ясно, что

$$\alpha = \angle ABP = 90° - 60° = 30°.$$

Точки P и Q лежат на окружности с диаметром BC, поэтому $MP = MQ$ и центральный угол PMQ вдвое больше вписанного угла PBQ (рис. 60). Следовательно, $\angle PMQ = 2\alpha = 60°$. Треугольник PQM равнобедренный с углом $60°$ при вершине, поэтому он равносторонний.

Задачи для самостоятельного решения

Вписанные углы, опирающиеся на одну и ту же хорду

14.1. Из точки M, лежащей внутри острого угла с вершиной A, проведены перпендикуляры MP и MQ к его сторонам. Докажите, что $\angle PAM = \angle PQM$.

14.2. В остроугольном треугольнике ABC проведены высоты AA_1 и BB_1. Докажите, что $\angle CA_1B_1 = \angle A$.

14.3. Из точки M, расположенной на катете BC прямоугольного треугольника ABC, проведён перпендикуляр MH к гипотенузе AB. Докажите, что $\angle MAH = \angle MCH$.

14.4. В треугольнике ABC с прямым углом C проведены высота CH и биссектриса CF; HK и HL — биссектрисы треугольников BHC и AHC. Докажите, что $CLFK$ — квадрат.

14.5. Из точки H, лежащей на стороне AC остроугольного треугольника ABC, проведены перпендикуляры HP и HQ к прямым AB и BC. Оказалось, что точки A, P, Q и C лежат на одной окружности. Докажите, что BH — высота треугольника ABC.

14.6. Перпендикулярные хорды AB и CD окружности пересекаются в точке E, точка M — середина хорды BD. Докажите, что $ME \perp AC$.

14.7. Докажите, что основания высот остроугольного треугольника являются вершинами треугольника, углы которого делятся этими высотами пополам.

14.8. а) Внутри параллелограмма $ABCD$ выбрана точка P так, что $\angle PAD = \angle PCD$. Докажите, что $\angle PBC = \angle PDC$.

б) Внутри параллелограмма $ABCD$ выбрана точка P так, что $\angle APB + \angle CPD = 180°$. Докажите, что $\angle PBC = \angle PDC$.

14.9. Вершины равностороннего треугольника ABC лежат на окружности. На дуге AB этой окружности отмечена точка D. Докажите, что $AD + BD = CD$.

14.10. Две окружности пересекаются в точках M и N. Прямые AB и CD, проходящие через эти точки, пересекают одну окружность в точках A и C, а другую в точках B и D. Отрезки AC и BD расположены по разные стороны от прямой MN (рис. 61). Докажите, что $AC \parallel BD$.

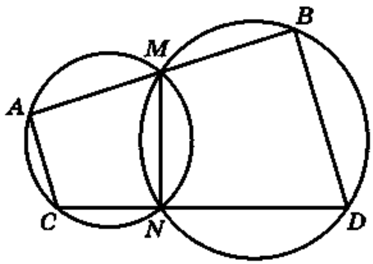


Рис. 61

14.11. В окружности проведены пересекающиеся хорды AB и CD. На отрезке AB отмечена точка M так, что $AM = AC$, а на отрезке CD — точка N так, что $DN = DB$. Докажите, что если точки M и N не совпадают, то прямые AD и MN параллельны.

Равные вписанные углы опираются на равные дуги

14.12. Вершины двух равнобедренных трапеций с соответственно параллельными сторонами расположены на одной окружности. Докажите, что диагонали этих трапеций равны.

14.13. В треугольнике ABC проведены медианы AA_1 и BB_1. Докажите, что если $\angle CAA_1 = \angle CBB_1$, то $AC = BC$.

14.14. Из точки M, двигающейся по окружности, проводятся перпендикуляры MP и MQ к диаметрам AB и CD. Докажите, что длина отрезка PQ не зависит от положения точки M.

14.15. Две окружности пересекаются в точках A и B, на одной из них выбирается точка C. Продолжения отрезков CA и CB за точки A и B пересекают вторую окружность в точках K и L. Докажите, что длина хорды KL не зависит от положения точки C.

14.16. Точка D лежит на биссектрисе угла A. Две окружности, проходящие через точки A и D, пересекают одну сторону этого угла в точках B_1 и B_2, а другую — в точках C_1 и C_2. Докажите, что $B_1B_2 = C_1C_2$.

Вписанный угол, равный половине центрального угла

14.17. Окружность S_1 проходит через центр O окружности S_2. Эти окружности пересекаются в точках A и B. Хорда OC окружности S_1 пересекает окружность S_2 в точке D. Докажите, что AD — биссектриса угла BAC.

14.18. Точка M лежит внутри угла ABC равностороннего треугольника ABC, $\angle AMB = 30°$ и $\angle MBC = \alpha$. Найдите углы BAM и BCM.

14.19. Дан квадрат $ABCD$. Внутри треугольника ACD выбрана точка M так, что $\angle MAC = \angle MCD = \alpha$. Найдите угол ABM.

14.20. На окружности отмечены точки A, B, C и E, причём точка E — середина дуги AB, а точки B и C лежат по разные стороны от прямой AE. Из точки E проведён перпендикуляр EF к прямой BC (рис. 62). Докажите, что $AC + CF = BF$ (задача Архимеда).

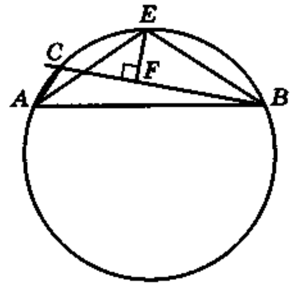


Рис. 62

Угол между хордами или между секущими

14.21. Хорды AB и CD пересекаются в точке M. Докажите, что угол AMC равен полусумме дуг окружности, заключённых внутри этого угла и угла BMD.

14.22. Продолжения хорд AB и CD пересекаются в точке M. Докажите, что угол AMC равен полуразности дуг окружности, заключённых внутри этого угла.

Комментарий. При вычислении углов между хордами и между секущими мы будем использовать результаты задач 14.21 и 14.22.

14.23. На окружности даны точки A, B, C и D в указанном порядке, A_1, B_1, C_1 и D_1 — середины дуг AB, BC, CD и DA. Докажите, что $A_1C_1 \perp B_1D_1$.

14.24. На окружности даны точки A, B, C и D в указанном порядке, M — середина дуги AB, K и E — точки пересечения хорд MC и MD с хордой AB. Докажите, что сумма противоположных углов четырёхугольника $EKCD$ равна 180°.

Глава 15 Соотношения между сторонами и углами треугольника

Каждая сторона треугольника меньше суммы двух других сторон (*неравенство треугольника*).

В треугольнике против большей стороны лежит больший угол, а против большего угла лежит бо́льшая сторона.

Пример 1 Докажите, что для любых точек A, B, C и D выполняется неравенство $AB + BC + CD \geqslant AD$. В каком случае выполняется равенство?

Решение. Из неравенств $AD \leqslant AB + BD$ и $BD \leqslant BC + CD$ следует, что $AD \leqslant AB + BD \leqslant AB + BC + CD$.

Неравенство $AD \leqslant AB + BD$ обращается в равенство, когда точка B лежит между A и D, а неравенство $BD \leqslant BC + CD$ — когда точка C лежит между B и D.

Ответ: равенство выполняется, когда точки лежат на одной прямой в следующем порядке: A, B, C, D, т. е. точка B лежит между A и D, а точка C лежит между B и D.

Пример 2 Любой ли треугольник можно разрезать на два треугольника, периметры которых равны?

Решение. Отметим на стороне AB треугольника ABC некоторую точку D. Если $AD + AC = DB + BC$, то отрезок CD разрезает треугольник ABC на два треугольника, периметры которых равны.

Предположим, что $AD + AC = DB + BC = AB - AD + BC$. Тогда $2AD = AB + BC - AC$. Число $\dfrac{AB + BC - AC}{2}$ положительно (поскольку $AC < AB + BC$) и не превосходит AB (поскольку $BC < AB + AC$). Поэтому на отрезке AB можно отметить точку D, обладающую требуемым свойством.

Ответ: любой.

Пример 3 На сторонах угла с вершиной O отложены равные отрезки OA и OB, и на продолжении отрезка OA за точку A отмечена точка C. Докажите, что $AB < BC$ и $AC < BC$.

Решение. Углы при основании AB равнобедренного треугольника AOB острые, поэтому угол BAC тупой (рис. 63). Следовательно, угол A треугольника ABC больше любого из двух других углов, поэтому лежащая против угла A сторона BC больше сторон AB и AC, лежащих против двух других углов.

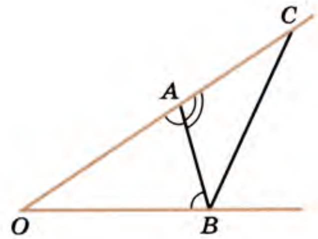


Рис. 63

Задачи для самостоятельного решения

Точки внутри или вне круга

15.1. Докажите, что если точка C лежит вне круга с диаметром AB, то угол C треугольника ABC острый.

15.2. Докажите, что если точка C лежит внутри круга с диаметром AB, то угол C треугольника ABC тупой.

15.3. Может ли отрезок, расположенный внутри круга, быть больше диаметра этого круга?

15.4. Докажите, что если углы A и C выпуклого четырёхугольника $ABCD$ тупые, то $AC < BD$.

Медианы треугольника

15.5. Докажите, что медиана треугольника меньше полусуммы двух сторон, выходящих из той же вершины.

15.6. Докажите, что медиана AM треугольника ABC больше $\frac{1}{2}(AB + AC - BC)$.

15.7. Докажите, что сумма медиан любого треугольника меньше периметра, но больше $\frac{3}{4}$ периметра.

15.8. Сторона AC треугольника ABC меньше стороны BC. Докажите, что медиана AA_1 меньше медианы BB_1.

Отрезок короче ломаной

15.9. Докажите, что любая сторона четырёхугольника меньше суммы трёх других его сторон.

15.10. Докажите, что длина ломаной, соединяющей концы отрезка, больше длины этого отрезка.

15.11. Докажите, что отрезок, соединяющий две точки на сторонах многоугольника, меньше половины периметра этого многоугольника.

Один треугольник внутри другого

15.12. Внутри треугольника ABC отмечена произвольная точка O. Докажите, что $AB + BC > AO + OC$.

15.13. Внутри треугольника ABC, периметр которого равен P, отмечена произвольная точка O. Докажите, что $\frac{1}{2}P < OA + OB + OC < P$.

15.14. Точки B_1 и C_1 лежат на сторонах AB и AC треугольника ABC. Докажите, что периметр треугольника ABC больше периметра треугольника AB_1C_1.

15.15. Точки A_1, B_1 и C_1 лежат на сторонах CB, BA и AC треугольника ABC. Докажите, что периметр треугольника ABC больше периметра треугольника $A_1B_1C_1$.

15.16. Один треугольник лежит внутри другого. Докажите, что периметр внутреннего треугольника меньше периметра внешнего.

15.17. На основании AD трапеции $ABCD$ отмечена точка M. Известно, что периметры треугольников ABM, MBC и CMD равны. Докажите, что $AD = 2BC$.

Четырёхугольник

15.18. Докажите, что диагональ четырёхугольника меньше половины его периметра.

15.19. Докажите, что сумма диагоналей любого четырёхугольника меньше его периметра.

15.20. Докажите, что отрезок, соединяющий середины противоположных сторон четырёхугольника, меньше полусуммы его диагоналей.

15.21. Точки M и N — середины сторон AB и CD четырёхугольника $ABCD$. Докажите, что $MN \leqslant \frac{1}{2}(BC + AD)$.

Против большей стороны лежит больший угол

15.22. Решите задачу 15.1, воспользовавшись тем, что против большей стороны лежит больший угол.

15.23. В треугольнике ABC проведена биссектриса BD. Докажите, что $AB > AD$.

15.24. В треугольнике ABC, в котором $AB > BC$, проведена биссектриса BD. Докажите, что $AD > DC$.

15.25. Точка A расположена вне окружности. При каком положении точки B на окружности отрезок AB: а) самый длинный; б) самый короткий?

15.26. Точка A расположена внутри окружности, но не в её центре. При каком положении точки B на окружности отрезок AB: а) самый длинный; б) самый короткий?

15.27. Угол A треугольника ABC больше угла B. Докажите, что сторона BC больше половины стороны AB.

15.28. В треугольнике ABC проведена медиана BM. Известно, что $AB > BC$. Сравните углы ABM и CBM.

15.29. На продолжении наибольшей стороны AC треугольника ABC отложен отрезок CD, равный BC. Докажите, что угол ABD тупой или прямой.

15.30. С каждого из нескольких аэродромов, все попарные расстояния между которыми различны, взлетел самолёт и совершил посадку на ближайшем аэродроме. Докажите, что ни на одном аэродроме не могло приземлиться более пяти самолётов.

Равнобедренный треугольник с углом 20° при вершине

15.31. Докажите, что в равнобедренном треугольнике с углом 20° при вершине боковая сторона больше удвоенного основания.

15.32. Докажите, что в равнобедренном треугольнике с углом 20° при вершине боковая сторона меньше утроенного основания.

Отрезок внутри треугольника

15.33. На основании AC равнобедренного треугольника ABC отмечена точка K. Докажите, что $BK < AB$.

15.34. На стороне BC треугольника ABC отмечена точка M. Докажите, что $AM < AB$ или $AM < AC$.

15.35. Докажите, что длина отрезка, расположенного внутри треугольника, не превосходит наибольшей стороны этого треугольника.

15.36. Докажите, что длина отрезка, расположенного внутри многоугольника, не превосходит наибольшей диагонали или наибольшей стороны этого многоугольника.

15.37. Может ли сторона пятиугольника быть больше любой из его диагоналей?

Теорема Пифагора

Теорема Пифагора. Сумма квадратов катетов прямоугольного треугольника равна квадрату гипотенузы.

Теорема, обратная теореме Пифагора. Если квадрат стороны треугольника равен сумме квадратов двух других сторон, то этот треугольник прямоугольный.

Прямоугольный треугольник, длины сторон которого выражаются целыми числами, называют *пифагоровым*.

Пример Докажите, что отношение длин диагонали квадрата и его стороны не является рациональным числом.

Решение. Если длина стороны квадрата равна a, то по теореме Пифагора квадрат длины его диагонали равен $2a^2$. Предположим, что отношение диагонали квадрата к его стороне равно несократимой дроби $\frac{p}{q}$. Тогда $\left(\frac{p}{q}\right)^2 = 2$, поэтому $p^2 = 2q^2$. Следовательно, число p чётное: $p = 2r$ для некоторого целого r. Поэтому $4r^2 = 2q^2$, т. е. $q^2 = 2r^2$. Таким образом, число q тоже чётное, а это противоречит несократимости дроби $\frac{p}{q}$.

Задачи для самостоятельного решения

Вычисления с помощью теоремы Пифагора

16.1. Из вершины A треугольника ABC с острым углом B проведена высота AH. Выразите отрезок BH через стороны треугольника: $BC = a$, $CA = b$ и $AB = c$.

16.2. Из вершины A треугольника ABC с тупым углом B проведена высота AH. Выразите отрезок BH через стороны треугольника: $BC = a$, $CA = b$ и $AB = c$.

16.3. Выразите высоту AH треугольника ABC через его стороны: $BC = a$, $CA = b$ и $AB = c$.

16.4. Медианы треугольника ABC, проведённые из вершин A и B, перпендикулярны. Докажите, что его стороны: $a = BC$, $b = CA$ и $c = AB$ связаны соотношением $a^2 + b^2 = 5c^2$.

16.5. Из точки M проведены перпендикуляры MP, MQ и MR к сторонам AB, BC и CA треугольника ABC или к их продолжениям. Докажите, что $AP^2 + BQ^2 + CR^2 = PB^2 + QC^2 + RA^2$ (рис. 64).

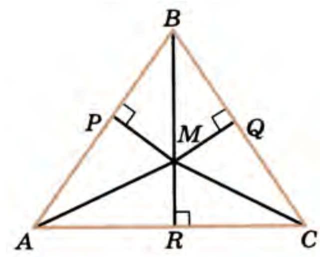


Рис. 64

16.6. Вершины квадрата $ABCD$ расположены на окружности, точка X движется по этой окружности. Докажите, что при этом величина $AX^2 + BX^2 + CX^2 + DX^2$ остаётся постоянной.

Диагональ квадрата со стороной a равна $\sqrt{2}a$

Комментарий. Квадрат, одной из сторон которого является гипотенуза прямоугольного треугольника, можно построить двумя способами. Если квадрат и треугольник расположены по разные стороны от гипотенузы, то говорят, что квадрат построен на гипотенузе внешним образом, а если по одну сторону, то внутренним.

16.7. На гипотенузе прямоугольного треугольника внешним образом построен квадрат. Расстояние от вершины прямого угла до центра квадрата равно d. Найдите сумму катетов треугольника.

16.8. На гипотенузе прямоугольного треугольника внутренним образом построен квадрат. Расстояние от вершины прямого угла до центра квадрата равно d. Найдите разность катетов треугольника.

Прямая, перпендикулярная отрезку

16.9. Точка M движется по прямой, перпендикулярной отрезку AB. Докажите, что при этом величина $AM^2 - BM^2$ остаётся постоянной.

16.10. Докажите, что для двух данных точек A и B множество всех точек M, для которых величина $AM^2 - BM^2$ принимает данное значение, — это прямая, перпендикулярная отрезку AB.

Пифагоровы треугольники

16.11. Приведите пример двух неравных пифагоровых треугольников, катет одного из которых равен катету другого.

16.12. Приведите пример неравнобедренных тупоугольного и остроугольного треугольников, у которых длины всех сторон и одной из высот — целые числа.

Подобные треугольники

Отрезки AB и CD называют *пропорциональными отрезкам* A_1B_1 и C_1D_1, если $\frac{AB}{A_1B_1} = \frac{CD}{C_1D_1}$. Два треугольника называют *подобными*, если стороны одного треугольника пропорциональны сторонам другого треугольника.

Если два треугольника подобны, то углы одного треугольника соответственно равны углам другого треугольника.

Первый признак подобия треугольников. Если две стороны одного треугольника пропорциональны двум сторонам другого треугольника, а углы, заключённые между этими сторонами, равны, то такие треугольники подобны.

Второй признак подобия треугольников. Если два угла одного треугольника соответственно равны двум углам другого треугольника, то такие треугольники подобны.

Пример 1 На диагонали BD параллелограмма $ABCD$ отмечена точка K. Прямая AK пересекает прямые BC и CD в точках L и M (рис. 65). Докажите, что

$$AK^2 = LK \cdot KM.$$

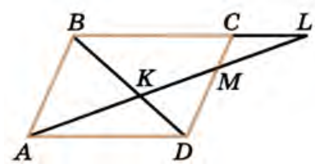


Рис. 65

Решение. Прямые AB и DM параллельны, поэтому $\triangle AKB \backsim \triangle MKD$.

Аналогично $\triangle AKD \backsim \triangle LKB$. Следовательно,

$$AK : MK = KB : KD = LK : AK,$$

т. е. $AK^2 = LK \cdot KM$.

Пример 2 Две вершины квадрата расположены на одной стороне треугольника, а две другие вершины — на других сторонах. Высота треугольника равна h, а сторона, на которой расположена сторона квадрата, равна a. Найдите сторону квадрата.

Решение. Пусть искомая сторона квадрата равна x. Сторона квадрата, параллельная стороне a, отрезает от исходного треугольника

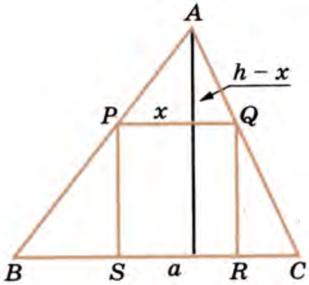


Рис. 66

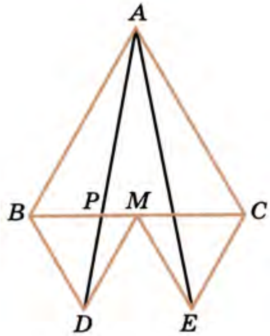


Рис. 67

подобный ему треугольник (рис. 66). Высота отрезанного треугольника, проведённая к стороне x, равна $h - x$. Из подобия треугольников получаем $x : a = AP : AB = (h - x) : h$.

Следовательно, $x(a + h) = ah$.

Ответ: $\dfrac{ah}{a + h}$.

Пример 3 Точка M — середина стороны BC равностороннего треугольника ABC. На стороне BC внешним образом построены равносторонние треугольники BMD и CME. Докажите, что отрезки AD и AE делят сторону BC на три равные части.

Решение. Пусть отрезок AD пересекает сторону BC в точке P (рис. 67). Прямые AB и DM параллельны, поэтому $\triangle DPM \sim \triangle APB$. Следовательно, $MP : PB = MD : AB = 1 : 2$, т. е. $BP = \dfrac{1}{3} BC$.

Задачи для самостоятельного решения

Отрезки, высекаемые параллельными прямыми и на параллельных прямых

17.1. а) Докажите, что параллельные прямые высекают на секущих пропорциональные отрезки: $\dfrac{OA_1}{OA_2} = \dfrac{OB_1}{OB_2} = \dfrac{A_1B_1}{A_2B_2}$ (рис. 68).

б) Прямые высекают на сторонах угла с вершиной O пропорциональные отрезки: $\dfrac{OA_1}{OA_2} = \dfrac{OB_1}{OB_2}$. Докажите, что эти прямые параллельны.

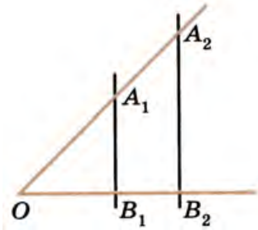


Рис. 68

17.2. Прямые a, b и c пересекаются в точке O. Две параллельные прямые пересекают эти прямые в точках A_1, B_1, C_1 и A_2, B_2, C_2. Докажите, что $A_1B_1 : B_1C_1 = A_2B_2 : B_2C_2$.

17.3. На основании AD трапеции $ABCD$ отмечена точка E так, что $AE = BC$. Отрезки CA и CE пересекают диагональ BD в точках O и P. Докажите, что если $BO = PD$, то $AD^2 = BC^2 + AD \cdot BC$.

17.4. На сторонах BC и CA треугольника ABC отмечены точки A_1 и B_1. Отрезки AA_1 и BB_1 пересекаются в точке O. Найдите отношение $AO : OA_1$, если $AB_1 = p$, $B_1C = q$, $BA_1 = m$ и $A_1C = n$.

17.5. На боковой стороне AB трапеции $ABCD$ отмечена точка K. Через точку A проведена прямая l, параллельная прямой KC, а через точку B проведена прямая m, параллельная прямой KD. Докажите, что проведённые прямые пересекаются в точке, лежащей на стороне CD.

17.6. Через точку P медианы CC_1 треугольника ABC проведены прямые AA_1 и BB_1 (точки A_1 и B_1 лежат на сторонах CB и CA). Докажите, что $A_1B_1 \parallel AB$.

17.7. Отрезок прямой, параллельной основаниям трапеции, заключённый внутри трапеции, разделяется её диагоналями на три части. Докажите, что отрезки, прилегающие к боковым сторонам, равны.

17.8. На основании AD трапеции $ABCD$ отмечены точки K и L так, что $AK = LD$. Отрезки AC и BL пересекаются в точке M, а отрезки KC и BD — в точке N. Докажите, что отрезок MN параллелен основаниям трапеции.

17.9. Прямая пересекает стороны AB и AD параллелограмма $ABCD$ в точках E и F, а диагональ AC — в точке G. Докажите, что

$$\frac{AB}{AE} + \frac{AD}{AF} = \frac{AC}{AG}.$$

17.10. На боковых сторонах AB и BC равнобедренного треугольника ABC отмечены точки K и L так, что $AK = BL$, и через точки K и L проведены прямые, параллельные BC и AB. Докажите, что точка пересечения этих прямых лежит на стороне AC.

17.11. Точки M и N — середины сторон AB и AD параллелограмма $ABCD$, отрезки BN и CM пересекаются в точке P (рис. 69). Найдите отношение $BP : PN$.

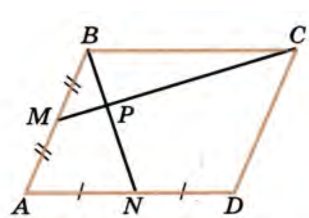


Рис. 69

17.12. Основания AD и BC трапеции $ABCD$ равны a и b ($a > b$). Найдите длину отрезка MN, концы которого делят боковые стороны трапеции в отношении $AM : MB = DN : NC = p : q$.

17.13. Докажите, что середины оснований трапеции, точка пересечения диагоналей и точка пересечения продолжений боковых сторон лежат на одной прямой.

17.14. Точки M и N — середины сторон BC и AD прямоугольника $ABCD$, точка K лежит на продолжении диагонали AC за точку A. Отрезок KM пересекает сторону AB в точке L. Докажите, что $\angle LNA = \angle ANK$.

17.15. В треугольнике ABC проведены биссектрисы AA_1 и BB_1. Докажите, что расстояние от любой точки M отрезка A_1B_1 до прямой AB равно сумме расстояний от точки M до прямых AC и BC.

Отношение сторон подобных треугольников

17.16. Докажите, что отношение высот подобных треугольников равно отношению их соответственных сторон. Докажите то же самое для биссектрис и медиан.

17.17. Углы A и C треугольника ABC равны 72°. Докажите, что

$$AB^2 = AC^2 + AB \cdot AC.$$

17.18. Углы A и B трапеции $ABCD$ прямые, а её диагонали перпендикулярны. Основания трапеции равны a и b. Найдите её высоту.

17.19. Пусть A_1 и C_1 — проекции вершин A и C треугольника ABC на биссектрису внешнего угла при вершине B. Докажите, что отрезки AC_1 и CA_1 пересекаются на биссектрисе угла ABC.

17.20. Углы треугольника ABC связаны соотношением $3\angle A + 2\angle B = 180°$. Докажите, что

$$AB^2 = BC^2 + AB \cdot AC.$$

17.21. Прямая, проходящая через вершину A квадрата $ABCD$, пересекает сторону CD в точке E и прямую BC в точке F. Докажите, что

$$\frac{1}{AE^2} + \frac{1}{AF^2} = \frac{1}{AB^2}.$$

17.22. Через точку P биссектрисы угла проведена прямая, отсекающая на его сторонах отрезки, равные a и b. Докажите, что величина $\frac{1}{a} + \frac{1}{b}$ не зависит от выбора этой прямой.

17.23. Внутри треугольника ABC отмечена точка O, прямые AO, BO и CO пересекают стороны треугольника в точках A_1, B_1 и C_1. Докажите, что

$$\frac{AO}{OA_1} = \frac{AB_1}{B_1C} + \frac{AC_1}{C_1B}.$$

Признаки подобия треугольников

17.24. В остроугольном треугольнике ABC проведены высоты AA_1 и BB_1. Докажите, что $\triangle A_1B_1C \sim \triangle ABC$.

17.25. Докажите, что проекции основания высоты остроугольного треугольника на стороны, её заключающие, и на две другие высоты лежат на одной прямой.

17.26. Из вершины A параллелограмма $ABCD$ проведены перпендикуляры AM и AN к прямым BC и CD. Докажите, что $\triangle ABC \sim \triangle MAN$.

17.27. Две стороны треугольника равны двум сторонам подобного ему треугольника. Могут ли эти треугольники быть неравными?

17.28. В равнобедренном треугольнике ABC из середины H основания BC проведён перпендикуляр HE к боковой стороне AC; точка O — середина отрезка HE. Докажите, что прямые AO и BE перпендикулярны.

Подобные треугольники и вписанный угол

17.29. Хорды AB и CD окружности пересекаются в точке M. Докажите, что $\triangle AMC \sim \triangle DMB$.

17.30. Хорды AB и CD окружности пересекаются в точке M. Докажите, что $AM \cdot MB = CM \cdot MD$.

17.31. Хорды AB и CD окружности пересекаются в точке M. Докажите, что

$$\frac{AC \cdot AD}{BC \cdot BD} = \frac{AM}{BM}.$$

17.32. Вершины равностороннего треугольника ABC лежат на окружности. На меньшей дуге BC этой окружности отмечена точка P. Отрезок AP пересекает сторону BC в точке Q. Докажите, что

$$\frac{1}{PQ} = \frac{1}{PB} + \frac{1}{PC}.$$

17.33. Вершины равностороннего треугольника ABC лежат на окружности. На меньшей дуге AB отмечена точка M. Прямые AC и BM пересекаются в точке K, а прямые BC и AM — в точке N. Докажите, что произведение длин отрезков AK и BN не зависит от выбора точки M.

Свойство биссектрисы треугольника

17.34. Докажите, что биссектриса треугольника делит его сторону на части, пропорциональные двум другим сторонам.

17.35. Биссектриса внешнего угла с вершиной A треугольника ABC пересекает прямую BC в точке D. Докажите, что $BD : CD = AB : AC$.

17.36. В каком отношении биссектриса BE треугольника ABC делит биссектрису AD, если $AB = c$, $BC = a$ и $AC = b$?

17.37. В треугольнике ABC проведена биссектриса AD и на стороне AB отмечена точка E так, что $ED \parallel AC$. Найдите ED, если $AB = c$ и $AC = b$.

17.38. Точка M — середина стороны AB треугольника ABC, отрезки MA_1 и MB_1 — биссектрисы треугольников AMC и BMC. Докажите, что прямые AB и A_1B_1 параллельны.

17.39. В треугольнике ABC, сторона AB которого вдвое больше стороны AC, проведены биссектриса AD и медиана CM. Докажите, что $BD = 2MD$.

17.40. В треугольнике ABC угол A вдвое больше угла B. Докажите, что

$$BC^2 = (AC + AB) \cdot AC.$$

17.41. В равнобедренном треугольнике ABC с основанием AC проведена биссектриса AD. Докажите, что если $BD = AC$, то $AD = AC$.

17.42. Точка C расположена на гипотенузе AF прямоугольного треугольника ABF. Докажите, что в треугольнике ABC биссектриса AD, медиана BM и высота CH пересекаются в одной точке тогда и только тогда, когда $AB = CF$.

Теоремы синусов и косинусов

Синус острого угла прямоугольного треугольника — это отношение катета, противолежащего этому углу, к гипотенузе. Синус угла α обозначают $\sin\alpha$.

Косинус острого угла прямоугольного треугольника — это отношение катета, прилежащего к этому углу, к гипотенузе. Косинус угла α обозначают $\cos\alpha$.

Синус и косинус угла связаны соотношением $\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$ **(основное тригонометрическое тождество).**

Формулы приведения: $\sin(90° - \alpha) = \cos\alpha$, $\cos(90° - \alpha) = \sin\alpha$, $\sin(180° - \alpha) = \sin\alpha$, $\cos(180° - \alpha) = -\cos\alpha$.

Если все вершины треугольника лежат на окружности, то эту окружность называют *описанной* около треугольника, а треугольник называют *вписанным* в окружность. Около любого треугольника можно описать окружность. Центр этой окружности — точка пересечения серединных перпендикуляров к сторонам треугольника.

Сторона треугольника равна произведению диаметра описанной окружности на синус противолежащего угла.

Теорема синусов. Стороны треугольника пропорциональны синусам противолежащих углов.

Теорема косинусов. Квадрат стороны треугольника равен сумме квадратов двух других сторон минус удвоенное произведение этих сторон, умноженное на косинус угла между ними.

Пример 1 Углы α и β острые, и $\alpha < \beta$. Докажите, что $\cos\alpha > \cos\beta$ и $\sin\alpha < \sin\beta$.

Решение. Рассмотрим прямоугольные треугольники OAC и OBC с общим катетом OC и углами α и β при этом катете (рис. 70). Тогда $AC < BC$, поэтому угол OAB тупой, и, значит, $OA < OB$.

Следовательно, $\cos\alpha = \dfrac{OC}{OA} > \dfrac{OC}{OB} = \cos\beta$.

Из доказанного неравенства для косинусов следует неравенство для синусов, поскольку $\sin^2\alpha = 1 - \cos^2\alpha < 1 - \cos^2\beta = \sin^2\beta$.

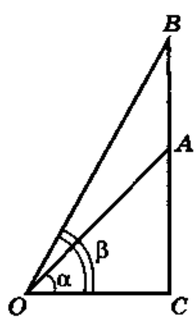


Рис. 70

Пример 2 Угол C треугольника ABC острый, AA_1 и BB_1 — высоты треугольника. Докажите, что треугольники ABC и A_1B_1C подобны, причём коэффициент подобия равен $\cos C$.

Решение. У треугольников ABC и A_1B_1C угол C общий, а стороны, заключающие этот угол, пропорциональны, поскольку $A_1C = AC\cos C$ и $B_1C = BC\cos C$.

Пример 3 Докажите, что проекция диаметра окружности, описанной около треугольника, перпендикулярного одной стороне треугольника, на прямую, содержащую вторую сторону, равна третьей стороне.

Решение. Пусть радиус окружности, описанной около треугольника ABC, равен R. Угол между прямой, перпендикулярной стороне AB треугольника ABC, и прямой AC равен $\pm(90° - \angle A)$, поэтому проекция диаметра описанной окружности, перпендикулярного стороне AB, на прямую AC равна $2R\cos(90° - \angle A) = 2R\sin A = BC$.

Пример 4 Докажите, что квадрат медианы AM треугольника ABC равен $\dfrac{2b^2 + 2c^2 - a^2}{4}$, где $a = BC$, $b = CA$ и $c = AB$.

Решение. Пусть $AM = m$ и $\angle AMB = \varphi$. Применим теорему косинусов к треугольникам AMB и AMC:

$$c^2 = \frac{a^2}{4} + m^2 - am\cos\varphi \text{ и } b^2 = \frac{a^2}{4} + m^2 + am\cos\varphi.$$

Складывая эти равенства, получаем требуемое.

Задачи для самостоятельного решения

Синус и косинус. Тригонометрические соотношения

18.1. Углы α и β могут быть как острыми, так и тупыми. Следует ли из неравенства $\alpha < \beta$ неравенство $\sin\alpha < \sin\beta$?

18.2. Докажите, что если $\alpha + \beta < 180°$, то

$$\sin(\alpha + \beta) = \sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta.$$

18.3. Докажите, что если $\alpha + \beta < 180°$, то

$$\cos(\alpha + \beta) = \cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta.$$

18.4. Диагональ AC квадрата $ABCD$ является гипотенузой прямоугольного треугольника ACK, причём точки B и K лежат по одну сторону от прямой AC. Докажите, что $BK = \dfrac{|AK - CK|}{\sqrt{2}}$ и $DK = \dfrac{AK + CK}{\sqrt{2}}$.

18.5. Докажите, что для углов любого треугольника ABC выполняется равенство

$$2\cos A \cos B \cos C = 1 - \cos^2 A - \cos^2 B - \cos^2 C.$$

18.6. Докажите, что для углов любого треугольника ABC выполняется равенство

$$2\sin A \sin B \cos C = 1 + \cos^2 C - \cos^2 A - \cos^2 B.$$

18.7. Докажите, что $\sin^2\alpha + \sin^2(60^\circ + \alpha) + \sin^2(60^\circ - \alpha) = \dfrac{3}{2}$.

18.8. Точка X движется по окружности, описанной около равностороннего треугольника ABC. Докажите, что при этом величина $AX^2 + BX^2 + CX^2$ остаётся постоянной.

Косинус угла треугольника как коэффициент подобия

18.9. Угол C треугольника ABC тупой, AA_1 и BB_1 — высоты треугольника. Докажите, что треугольники ABC и A_1B_1C подобны, причём коэффициент подобия равен $-\cos C$.

18.10. Отрезки AA_1 и BB_1 — высоты треугольника ABC. Найдите угол C, если отрезок A_1B_1 вдвое меньше стороны AB.

18.11. В остроугольном треугольнике ABC проведены высоты AA_1, BB_1 и CC_1. Докажите, что отношение площади треугольника $A_1B_1C_1$ к площади треугольника ABC равно $2\cos A \cos B \cos C$.

18.12. Из вершин произвольного выпуклого четырёхугольника проведены перпендикуляры к его диагоналям. Докажите, что четырёхугольник с вершинами в основаниях этих перпендикуляров подобен исходному.

Теорема синусов

18.13. Докажите, что высота CH треугольника ABC равна $\dfrac{AC \cdot BC}{2R}$, где R — радиус окружности, описанной около треугольника.

18.14. Из основания высоты треугольника проведены перпендикуляры к двум его сторонам, и основания этих перпендикуляров соединены отрезком. Докажите, что для всех трёх высот треугольника длина этого отрезка одна и та же.

18.15. На основании AC равнобедренного треугольника ABC отмечена точка K. Докажите, что радиусы окружностей, описанных около треугольников ABK и BCK, равны.

18.16. На стороне BC остроугольного треугольника ABC отмечена точка D, и из неё проведены перпендикуляры DE и DF к сторонам AB и AC. При каком положении точки D длина отрезка EF наименьшая?

18.17. Четырёхугольник $ABCD$ вписан в окружность. На луче DC отложен отрезок DA_1, равный стороне BC, а на луче BA отложен отрезок BC_1, равный стороне AD. Докажите, что прямая BD делит отрезок A_1C_1 пополам.

Выражение площади треугольника через две стороны и синус угла между ними

Комментарий. Обозначим длины сторон BC, CA и AB треугольника ABC буквами a, b и c.

18.18. Докажите, что площадь треугольника ABC равна $\frac{1}{2}ab\sin C$.

18.19. Докажите, что площадь треугольника ABC равна $\frac{abc}{4R}$, где R — радиус окружности, описанной около треугольника.

18.20. Докажите, что длина биссектрисы AD треугольника ABC равна $\frac{2bc}{b+c}\cos\frac{A}{2}$.

18.21. Докажите, что для любого треугольника ABC выполняется неравенство

$$c \geqslant (a+b)\sin\frac{C}{2}.$$

18.22. Вершины четырёхугольника $ABCD$ лежат на окружности. Докажите, что произведение расстояний от произвольной точки M этой окружности до прямых AB и CD равно произведению расстояний от неё до прямых BC и AD.

Теорема косинусов

18.23. Докажите, что сумма квадратов диагоналей параллелограмма равна сумме квадратов всех его сторон.

18.24. Длины медиан, проведённых к сторонам a и b треугольника, равны m_a и m_b соответственно. Докажите, что если $a > b$, то $m_a < m_b$.

18.25. Основание и боковая сторона равнобедренного треугольника равны 5 и 20. Найдите биссектрису угла при основании.

18.26. У треугольников ABC и $A_1B_1C_1$ стороны AB и A_1B_1 равны, стороны AC и A_1C_1 тоже равны, а угол A больше угла A_1. Докажите, что $BC > B_1C_1$.

18.27. Докажите, что медианы AA_1 и BB_1 треугольника ABC перпендикулярны тогда и только тогда, когда $a^2 + b^2 = 5c^2$.

18.28. Стороны параллелограмма равны a и b, его диагонали равны m и n. Докажите, что $a^4 + b^4 = m^2n^2$ тогда и только тогда, когда острый угол параллелограмма равен 45°.

18.29. Стороны выпуклого четырёхугольника равны a, b, c и d (стороны a и c противоположные), диагонали равны m и n, а угол между диагоналями равен α. Докажите, что

$$|a^2 + c^2 - b^2 - d^2| = 2mn|\cos\alpha|.$$

18.30. На стороне BC треугольника ABC отмечена точка X. Докажите, что $AB^2 \cdot CX + AC^2 \cdot BX - AX^2 \cdot BC = BC \cdot BX \cdot CX$ (теорема Стюарта).

18.31. Наибольшая сторона треугольника равна $\sqrt{3}$. Докажите, что три круга радиуса 1 с центрами в вершинах треугольника полностью покрывают треугольник.

18.32. В остроугольном треугольнике ABC биссектриса AD, медиана BM и высота CH пересекаются в точке O. Найдите $\cos A$, если $OM = 2OA$.

Глава 19
Площадь

Единица измерения площади — это квадрат, сторона которого равна единице измерения длины. Чтобы измерить площадь многоугольника, нужно узнать, сколько раз единица измерения площади и её части укладываются в данном многоугольнике.

Равные многоугольники имеют равные площади.

Если многоугольник составлен из нескольких многоугольников, то его площадь равна сумме площадей этих многоугольников.

Площадь прямоугольника равна произведению его смежных сторон.

Площадь треугольника равна половине произведения его основания на высоту. Площадь треугольника ABC будем обозначать S_{ABC}.

Площадь параллелограмма равна произведению его основания на высоту.

Площадь трапеции равна произведению полусуммы оснований на высоту.

Два многоугольника называют *равновеликими*, если их площади равны.

Если один многоугольник разрезан на части и из них составлен другой многоугольник, то исходный и полученный многоугольники называют *равносоставленными*. Равносоставленные многоугольники равновелики.

Пример 1 Диагонали трапеции $ABCD$ с основаниями AD и BC пересекаются в точке O. Докажите, что площади треугольников AOB и COD равны.

Решение. Треугольники ABD и ACD имеют общее основание AD. Прямые BC и AD параллельны, поэтому перпендикуляры, проведённые из точек B и C к прямой AD, равны. Следовательно, площади треугольников ABD и ACD равны. Вырезав из этих треугольников треугольник AOD, получим соответственно треугольники AOB и COD (рис. 71). Следовательно, площади треугольников AOB и COD равны.

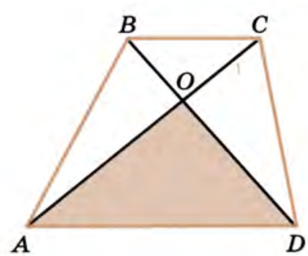


Рис. 71

Пример 2 Высота трапеции, диагонали которой взаимно перпендикулярны, равна 4 см, а одна из диагоналей равна 5 см. Найдите площадь трапеции.

Решение. Пусть диагональ AC трапеции $ABCD$ с основанием AD равна 5. Достроим треугольник ACB до параллелограмма $ACBE$ (рис. 72). Площадь трапеции $ABCD$ равна площади прямоугольного треугольника DBE. Пусть BH — высота треугольника DBE. Тогда по теореме Пифагора $EH^2 = BE^2 - BH^2 = 5^2 - 4^2 = 3^2$. Прямоугольные треугольники EDB и EBH с общим углом E подобны, поэтому $ED : EB = EB : EH$ и $ED = \frac{EB^2}{EH} = \frac{25}{3}$.

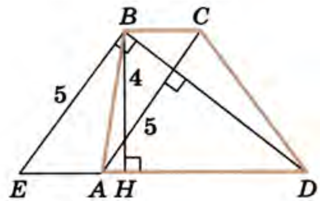


Рис. 72

Следовательно,

$$S_{DBE} = \frac{ED \cdot BH}{2} = \frac{50}{3}.$$

Ответ: $\frac{50}{3}$ см^2.

Пример 3 Внутри треугольника ABC постройте точку P так, что $S_{ABP} : S_{BCP} : S_{CAP} = 1 : 2 : 3$.

Решение. Построим сначала точку B_1 на стороне AC так, что $AB_1 : B_1C = 1 : 2$, и точку A_1 на стороне BC так, что $BA_1 : A_1C = 1 : 3$. Точка пересечения отрезков AA_1 и BB_1 — это искомая точка P, поскольку $S_{ABP} : S_{BCP} = AB_1 : B_1C$ и $S_{ABP} : S_{CAP} = BA_1 : A_1C$.

Задачи для самостоятельного решения

Треугольники с равными основаниями и равными высотами

19.1. Докажите, что если две стороны одного треугольника соответственно равны двум сторонам другого треугольника, а заключённые между этими сторонами углы составляют в сумме 180°, то площади этих треугольников равны.

19.2. Докажите, что медианы разбивают треугольник на шесть треугольников равной площади.

19.3. Для треугольника ABC найдите все точки P, для которых площади треугольников ABP, BCP и ACP равны. Сколько всего таких точек?

19.4. Стороны BC и CD пятиугольника $ABCDE$ параллельны диагоналям AD и BE. Докажите, что треугольники ABC и CDE равновелики.

19.5. Биссектрисы BB_1 и CC_1 треугольника ABC пересекаются в точке O. Докажите, что если площади треугольников AOB_1 и AOC_1 равны, то треугольник ABC равнобедренный.

Треугольники с общим углом

19.6. Докажите, что отношение площадей треугольников с общим углом равно отношению произведений их сторон, заключающих общий угол.

19.7. Углы A и A_1 треугольников ABC и $A_1B_1C_1$ составляют в сумме 180°. Докажите, что отношение площадей этих треугольников равно отношению произведений их сторон, заключающих углы A и A_1.

19.8. Диагонали четырёхугольника $ABCD$ пересекаются в точке O. Докажите, что произведение площадей треугольников AOB и COD равно произведению площадей треугольников BOC и COD.

19.9. Диагонали трапеции $ABCD$ с основанием AD пересекаются в точке O. Докажите, что $(S_{AOB})^2 = S_{AOD} \cdot S_{BOC}$.

19.10. В треугольнике ABC проведены биссектрисы AA_1, BB_1 и CC_1. Докажите, что отношение площади треугольника $A_1B_1C_1$ к площади треугольника ABC равно $\frac{2abc}{(a+b)(b+c)(a+c)}$, где a, b и c — длины сторон треугольника ABC.

Площадь параллелограмма

19.11. Точка M расположена внутри параллелограмма $ABCD$. Прямые, проходящие через эту точку параллельно сторонам параллелограмма, разбивают его на четыре параллелограмма. Докажите, что площади параллелограммов с вершинами B и D равны тогда и только тогда, когда точка M лежит на диагонали AC.

19.12. Для каждой стороны данного треугольника построен параллелограмм, одна из сторон которого равна и параллельна этой стороне треугольника, а другая равна и параллельна данному отрезку. Докажите, что наибольшая из площадей таких параллелограммов равна сумме площадей двух других параллелограммов.

19.13. На каждой из сторон параллелограмма отмечена точка так, что площадь четырёхугольника с вершинами в этих точках оказалась равной половине площади параллелограмма. Докажите, что одна из диагоналей этого четырёхугольника параллельна стороне параллелограмма.

Вычисление площадей

19.14. Квадрат и прямоугольник расположены так, как показано на рисунке 73. Площадь прямоугольника равна 14, сторона квадрата разделена в отношении 1 : 3. Найдите площадь квадрата.

19.15. Каждая сторона равностороннего треугольника разделена на три равные части, и вершины треугольника соединены с тремя точками деления, как показано на рисунке 74. Во сколько раз площадь закрашенного треугольника меньше площади исходного треугольника?

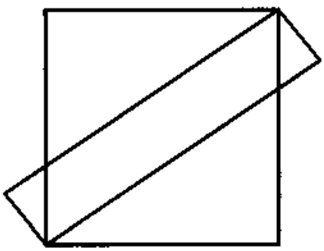


Рис. 73

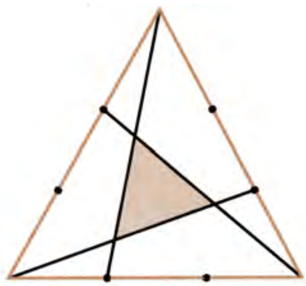


Рис. 74

19.16. Каждая диагональ выпуклого пятиугольника $ABCDE$ отсекает от него треугольник площадью S. а) Докажите, что $AD \parallel BC$. б) Найдите площадь пятиугольника $ABCDE$.

Сравнение площадей

19.17. Точки M и N — середины сторон AB и CD выпуклого четырёхугольника $ABCD$. Докажите, что $S_{CDM} = S_{BCN} + S_{ADN}$.

19.18. Точки M и N — середины сторон AB и CD выпуклого четырёхугольника $ABCD$, отрезки AN и DM пересекаются в точке K, а отрезки BN и CM — в точке L. Докажите, что площадь четырёхугольника $KMLN$ равна сумме площадей треугольников ADK и BCL.

19.19. Стороны AB и BC треугольника ABC равны, $AB > AC$. На стороне AB отмечена точка E, а на продолжении стороны AC за точку A отмечена точка D так, что $\angle BDC = \angle ECA$. Докажите, что площади треугольников DEC и ABC равны.

19.20. Точки E и F — середины сторон BC и CD квадрата $ABCD$. Отрезки AE и BF пересекаются в точке K. Что больше: площадь треугольника AKF или площадь четырёхугольника $KECF$?

19.21. На стороне AB треугольника ABC отмечена точка P, а на сторонах BC и AC отмечены точки Q и R так, что четырёхугольник $PQCR$ — параллелограмм. Отрезки AQ и PR пересекаются в точке M, а отрезки BR и PQ — в точке N. Докажите, что сумма площадей треугольников AMP и BNP равна площади треугольника RCQ.

Опровергающие примеры

19.22. Стороны одного треугольника меньше соответственных сторон другого треугольника. Может ли площадь треугольника с меньшими сторонами быть больше площади другого треугольника?

19.23. Все медианы треугольника больше 1 м. Может ли его площадь быть меньше 1 см^2?

19.24. Все высоты треугольника меньше 1 см. Может ли его площадь быть больше 1 м^2?

Формула Герона

19.25. Выразите площадь треугольника ABC через его стороны $a = BC$, $b = CA$ и $c = AB$ *(формула Герона)*.

19.26. Найдите площадь треугольника со сторонами 4, 13 и 15.

19.27. Каждую сторону треугольника увеличили на 1. Могла ли при этом его площадь уменьшиться?

Наибольшая и наименьшая площадь

19.28. Какую наибольшую площадь может иметь треугольник, две стороны которого равны a и b?

19.29. Докажите, что среди всех треугольников ABC с заданным углом при вершине A и заданной стороной BC наибольшую площадь имеет равнобедренный треугольник.

19.30. Какую наибольшую площадь может иметь выпуклый четырёхугольник, диагонали которого равны a и b?

19.31. Через данную точку, расположенную внутри данного угла, проведите прямую, отсекающую треугольник наименьшей площади.

Перегруппировка площадей

19.32. Из середины каждой стороны равностороннего треугольника проведены перпендикуляры к двум другим сторонам. Докажите, что площадь ограниченного ими шестиугольника равна половине площади исходного треугольника.

19.33. Докажите, что площадь выпуклого четырёхугольника не превосходит полусуммы произведений его противоположных сторон.

19.34. Середины сторон параллелограмма соединены отрезками, как показано на рисунке 75. Докажите, что площадь закрашенного параллелограмма в три раза меньше площади исходного.

Рис. 75

Вспомогательная площадь

19.35. Высоты треугольника равны h_a, h_b и h_c. Докажите, что $h_b h_c < h_a(h_b + h_c)$.

19.36. Докажите, что сумма расстояний от точки основания равнобедренного треугольника до его боковых сторон не зависит от положения точки.

19.37. Докажите, что сумма расстояний от точки внутри равностороннего треугольника до его сторон не зависит от положения точки.

19.38. Внутри треугольника ABC отмечена точка O. Прямые AO, BO и CO пересекают стороны треугольника в точках A_1, B_1 и C_1. Докажите, что

$$\frac{OA_1}{AA_1} + \frac{OB_1}{BB_1} + \frac{OC_1}{CC_1} = 1.$$

19.39. Точки E и F — середины сторон BC и AD выпуклого четырёхугольника $ABCD$. Докажите, что отрезок EF делит диагонали AC и BD в одном и том же отношении.

Глава 20 Касательные и секущие

Прямую, имеющую ровно одну общую точку с окружностью, называют *касательной* к окружности, а их общую точку называют *точкой касания* прямой и окружности.

Расстояние от центра окружности до касательной равно радиусу окружности.

Касательная к окружности перпендикулярна радиусу, проведённому в точку касания.

Пусть две касательные к окружности проходят через точку A и касаются окружности в точках B и C. Отрезки AB и AC называют *отрезками касательных*, проведёнными из точки A.

Отрезки касательных к окружности, проведённые из одной точки, равны и составляют равные углы с прямой, проходящей через эту точку и центр окружности.

Угол между касательной и хордой измеряется половиной дуги, заключённой внутри этого угла, т. е. он равен половине центрального угла, опирающегося на эту дугу.

Если через точку M проведены касательная MK, где K — точка касания, и секущая, пересекающая окружность в точках A и B, то $MK^2 = MA \cdot MB$.

Две окружности, имеющие общую точку, *касаются* в этой точке, если они имеют в ней общую касательную. Две окружности касаются тогда и только тогда, когда они имеют ровно одну общую точку.

Окружности касаются *изнутри* (или *внутренним образом*), если они расположены по одну сторону от общей касательной; касаются *извне* (или *внешним образом*), если они расположены по разные стороны от общей касательной.

Пример 1 Прямая касается окружности с диаметром AB в точке C. Из точки A проведён перпендикуляр AH к этой прямой. Докажите, что луч AC — биссектриса угла HAB.

Решение. Пусть O — центр окружности. Прямые AH и OC параллельны, поэтому $\angle HAC = \angle ACO = \angle OAC$.

Пример 2 Пусть AB и AC — отрезки касательных к окружности, проведённые из точки A, O — центр окружности. Третья касательная пересекает отрезки AB и AC в точках X и Y. Докажите, что величина угла XOY не зависит от выбора третьей касательной.

Решение. Пусть третья касательная касается окружности в точке Z. Тогда $\angle BOX = \angle ZOX$ и $\angle COY = \angle ZOY$, поэтому

$$\angle XOY = \frac{1}{2}\angle BOC.$$

Пример 3 Две окружности пересекаются в точках A и B, прямая касается этих окружностей в точках C и D. Докажите, что прямая AB проходит через середину отрезка CD.

Решение. Пусть прямая AB пересекает прямую CD в точке M. Тогда $MC^2 = MA \cdot MB = MD^2$.

Пример 4 К двум касающимся внешним образом окружностям, радиусы которых равны R и r, проведена прямая, касающаяся их в точках A и B. Найдите длину отрезка AB.

Решение. Соединим центры окружностей отрезком и проведём из центра меньшей окружности перпендикуляр к радиусу большей, проведённому в точку касания с прямой. В результате получим прямоугольный треугольник, катеты которого равны AB и $|R - r|$, а гипотенуза равна $R + r$. Поэтому $AB^2 = (R + r)^2 - (R - r)^2 = 4rR$.

Ответ: $2\sqrt{rR}$.

Задачи для самостоятельного решения

Касательная, перпендикулярная радиусу

20.1. Окружность, построенная на катете AB прямоугольного треугольника ABD как на диаметре, пересекает гипотенузу BD в точке C. Докажите, что касательная к окружности, проведённая через точку C, делит катет AD пополам.

20.2. Прямая l касается окружностей с центрами O_1 и O_2 и не пересекает отрезок O_1O_2. Докажите, что расстояние от середины этого отрезка до прямой l равно полусумме радиусов окружностей.

20.3. Прямая l касается окружностей с центрами O_1 и O_2 и пересекает отрезок O_1O_2. Докажите, что расстояние от середины этого отрезка до прямой l равно полуразности радиусов окружностей.

20.4. Радиусы двух окружностей равны R и r, а расстояние между их центрами равно d. Прямая касается этих окружностей в точках A и B, причём окружности лежат по одну сторону от этой прямой. Найдите длину отрезка AB.

20.5. К двум окружностям, радиусы которых равны R и r, а расстояние между их центрами равно d, проведена прямая, касающаяся их в точках A и B. Окружности при этом лежат по разные стороны от касательной. Найдите длину отрезка AB.

Отрезки касательных

20.6. Две параллельные прямые касаются окружности с центром O. Третья касательная пересекает эти прямые в точках A и B. Найдите угол AOB.

20.7. Стороны четырёхугольника $ABCD$ касаются окружности с центром O. Докажите, что $\angle AOB + \angle COD = 180°$.

20.8. Из точки A проведены отрезки касательных AB и AC к окружности с центром O. Через точку X отрезка BC проведена прямая KL, перпендикулярная XO (точки K и L лежат на прямых AB и AC). Докажите, что $KX = XL$.

20.9. Через точки A и B, лежащие на окружности, проведены равные отрезки касательных AK и BL так, что точки K и L лежат по разные стороны от прямой AB (рис. 76). Докажите, что прямая AB проходит через середину отрезка KL.

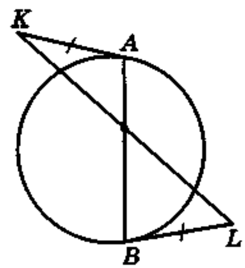


Рис. 76

Угол между касательной и хордой

20.10. Окружность, проходящая через вершины B и C треугольника ABC, пересекает стороны AB и AC в точках M и N. Докажите, что касательная в точке A к окружности, проходящей через точки A, M и N, параллельна прямой BC.

20.11. Через центр O окружности S_1 проведена окружность S_2. Эти окружности пересекаются в точках A и B. Касательная в точке B к окружности S_2 пересекает окружность S_1 в точке C. Докажите, что $AB = BC$.

20.12. Прямая касается в точках A и B двух окружностей, пересекающихся в точках K и L. Докажите, что $\angle AKB + \angle ALB = 180°$.

20.13. Окружности S_1 и S_2 пересекаются в точках A и P. Через точку A проведена касательная AB к окружности S_1, а через точку P — прямая CD, параллельная AB (точки B и C лежат на окружности S_2, точка D — на окружности S_1). Докажите, что четырёхугольник $ABCD$ — параллелограмм.

20.14. Из точки O проведены отрезок касательной OA и секущая, пересекающая окружность в точках B и C. Биссектриса угла AOB пересекает хорды AB и AC в точках P и Q. Докажите, что $AP = AQ$.

Квадрат касательной

20.15. Прямая OA касается окружности в точке A, а хорда BC параллельна OA. Прямые OB и OC пересекают окружность в точках K и L, отличных от точек B и C. Докажите, что прямая KL делит отрезок OA пополам.

20.16. Окружность касается сторон угла с вершиной O в точках A и B. Прямая, проходящая через точку A параллельно прямой OB, пересекает эту окружность в точке C. Отрезок OC пересекает окружность в точке E. Докажите, что прямая AE делит отрезок OB пополам.

20.17. Окружность и прямая касаются в точке M. Расстояния до этой прямой от точек A и B, лежащих на окружности, равны a и b. Найдите расстояние от точки M до прямой AB.

20.18. Диагонали параллелограмма $ABCD$ пересекаются в точке O. Окружность, проходящая через точки A, O и B, касается прямой BC. Докажите, что окружность, проходящая через точки B, O и C, касается прямой CD.

20.19. Найдите радиус окружности, которая проходит через точки A и B на одной стороне угла с вершиной O и касается другой стороны, если $OA = a$, $OB = b$ и угол равен α.

20.20. Из точки O проведены отрезок касательной OA и секущая, пересекающая окружность в точках B и C. Биссектриса угла AOB пересекает хорды AB и AC в точках P и Q. Докажите, что $AP^2 = PB \cdot QC$.

Касающиеся окружности

20.21. Три окружности, радиусы которых равны a, b и c, попарно касаются друг друга внешним образом. Найдите периметр треугольника, вершинами которого служат центры этих окружностей.

20.22. Две окружности расположены внутри окружности радиуса R и касаются друг друга и этой окружности. Найдите периметр треугольника, вершинами которого служат центры окружностей.

20.23. Три окружности с центрами A, B и C, касающиеся друг друга и прямой l, расположены так, как показано на рисунке 77. Докажите, что радиусы a, b и c окружностей с центрами A, B и C связаны соотношением

$$\frac{1}{\sqrt{c}} = \frac{1}{\sqrt{a}} + \frac{1}{\sqrt{b}}.$$

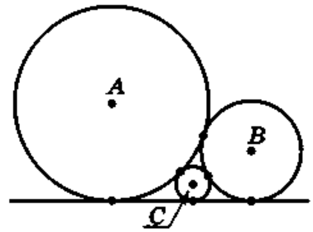


Рис. 77

20.24. Две окружности касаются внутренним образом третьей окружности в точках A и B, причём одна из точек пересечения этих окружностей лежит на отрезке AB. Докажите, что сумма радиусов первых двух окружностей равна радиусу третьей окружности.

20.25. Две окружности, сумма радиусов которых равна радиусу третьей окружности, касаются её внутренним образом. Докажите, что отрезок, соединяющий точки касания, проходит через одну из общих точек первых двух окружностей.

20.26. Две окружности касаются прямой в точках A и B и друг друга в точке C. Найдите угол ACB.

20.27. Внутри угла расположены две окружности с центрами A и B. Они касаются друг друга и сторон угла. Докажите, что окружность с диаметром AB тоже касается сторон угла.

20.28. Две окружности касаются внутренним образом в точке A, AB — диаметр большей окружности. Хорда BK большей окружности касается меньшей окружности в точке C. Докажите, что AC — биссектриса треугольника BAK.

20.29. Прямая проходит через точку A касания окружностей S_1 и S_2 и пересекает их в точках A_1 и A_2; O_1 и O_2 — центры окружностей. Докажите, что $A_1O_1 \parallel A_2O_2$.

20.30. В окружности с центром O проведена хорда AB и на её продолжении отмечена точка C. Через точку C проведены окружности, касающиеся этой окружности в точках A и B; они пересекаются в точке D. Докажите, что $\angle ODC = 90°$.

20.31. Две окружности касаются внешним образом. Из точки первой окружности, отличной от точки касания, проведена прямая, касающаяся второй окружности в точке A. Во второй окружности проведён диаметр AB. Докажите, что отрезок касательной, проведённый из точки B к первой окружности, равен AB.

Глава 21 Вписанная и описанная окружности

Биссектрисы треугольника пересекаются в одной точке.

Если все стороны треугольника касаются окружности, то эту окружность называют *вписанной* в треугольник, а треугольник называют *описанным* около окружности.

В любой треугольник можно вписать окружность, и притом только одну. Центр этой окружности — точка пересечения биссектрис треугольника.

Площадь треугольника равна половине произведения периметра на радиус окружности, вписанной в треугольник.

Если все вершины многоугольника лежат на окружности, то окружность называют *описанной* около многоугольника, а многоугольник — *вписанным* в эту окружность.

Сумма противоположных углов вписанного четырёхугольника равна 180°.

Если все стороны многоугольника касаются окружности, то окружность называют *вписанной* в многоугольник, а многоугольник — *описанным* около этой окружности.

Суммы противоположных сторон описанного четырёхугольника равны.

Пример 1 Окружность, вписанная в треугольник ABC, касается стороны AB в точке K. Докажите, что

$$AK = \frac{1}{2}(AB + AC - BC).$$

Решение. Пусть длины касательных, проведённых из вершин A, B и C к вписанной окружности, равны x, y и z. Тогда $x + y = AB$, $y + z = BC$ и $z + x = AC$. Поэтому $AB + AC - BC = 2x = 2AK$.

Пример 2 Докажите, что биссектриса угла C треугольника ABC и биссектриса внешнего угла с вершиной C пересекают окружность, описанную около треугольника, в точках, равноудалённых от точек A и B.

Решение. Эти точки являются серединами двух дуг, на которые точки A и B делят окружность.

Пример 3 Четырёхугольник с перпендикулярными диагоналями вписан в окружность. Докажите, что сумма квадратов двух его противоположных сторон равна квадрату диаметра окружности.

Решение. Пусть O — центр окружности, описанной около данного четырёхугольника $ABCD$. Из перпендикулярности диагоналей следует, что $\angle AOB + \angle COD = 180°$. Пусть M и N — середины сторон AB и CD. Тогда прямоугольные треугольники AOM и ODN равны по гипотенузе и острым углам. Катеты этих треугольников вдвое меньше сторон AB и CD.

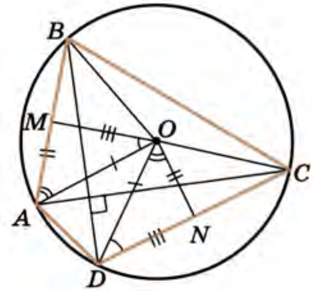


Рис. 78

Задачи для самостоятельного решения

Вписанная окружность

21.1. На основании AB равнобедренного треугольника ABC отмечена точка E, и в треугольники AEC и BEC вписаны окружности. Они касаются отрезка CE в точках M и N. Найдите длину отрезка MN, если известны длины отрезков AE и BE.

21.2. Окружность, вписанная в треугольник ABC, касается стороны AB в точке E. В треугольники AEC и BEC вписаны окружности. Докажите, что они обе касаются отрезка CE в одной и той же точке.

21.3. Докажите, что окружности, вписанные в треугольники ABC и ADC, касаются стороны AC в одной и той же точке тогда и только тогда, когда $AB + CD = BC + AD$.

21.4. В прямоугольный треугольник с катетами a и b и гипотенузой c вписана окружность радиуса r. Докажите, что $c = a + b - 2r$.

21.5. Стороны AB, BC и CA треугольника ABC касаются вписанной в него окружности в точках A_1, B_1 и C_1. Докажите, что треугольник $A_1B_1C_1$ остроугольный.

21.6. Трапеция $ABCD$ равнобедренная с основанием AD. В треугольники ABD и ABC вписаны окружности. Докажите, что прямая, проходящая через центры этих окружностей, перпендикулярна основаниям трапеции.

21.7. Найдите косинус угла при основании равнобедренного треугольника, если ортоцентр треугольника лежит на вписанной в него окружности.

Описанная окружность

21.8. Биссектрисы углов A и B треугольника ABC пересекают окружность, описанную около треугольника, в точках A_1 и B_1. Докажите, что прямая A_1B_1 перпендикулярна биссектрисе угла C.

21.9. Продолжение биссектрисы угла A треугольника ABC пересекает описанную около треугольника окружность в точке O, биссектрисы треугольника пересекаются в точке I. Докажите, что $OB = OI = OC$.

21.10. Продолжение биссектрисы угла A треугольника ABC пересекает описанную около треугольника окружность в точке O, биссектрисы внешних углов с вершинами B и C пересекаются в точке I_a. Докажите, что $OB = OI_a = OC$.

21.11. Прямая касается окружности, описанной около треугольника ABC, в точке A и пересекает прямую BC в точке E; отрезок AD — биссектриса треугольника ABC. Докажите, что $AE = ED$.

21.12. В остроугольном треугольнике ABC, вписанном в окружность с центром O, проведены высоты AA_1 и BB_1. Докажите, что прямые CO и A_1B_1 перпендикулярны.

21.13. В треугольнике ABC проведена биссектриса BL. Через точку L к окружности, описанной около треугольника BLC, проведена касательная, пересекающая сторону AB в точке P. Докажите, что прямая AC касается окружности, описанной около треугольника BPL.

21.14. Около треугольника ABC описана окружность, а на стороне AC отмечена точка D так, что $AD = AB$. Докажите, что серединный перпендикуляр к отрезку CD проходит через середину дуги BC, не содержащей точку A.

21.15. Докажите, что если биссектриса AD треугольника ABC делит пополам угол между медианой AM и высотой AH, то угол A прямой.

21.16. Биссектриса, медиана и высота треугольника делят его угол на четыре равные части. Найдите углы этого треугольника.

21.17. Внутри треугольника ABC отмечена точка P так, что $\angle BPC = \angle A + 60°$, $\angle APC = \angle B + 60°$ и $\angle APB = \angle C + 60°$. Прямые AP, BP и CP пересекают окружность, описанную около треугольника ABC, в точках A_1, B_1 и C_1. Докажите, что треугольник $A_1B_1C_1$ равносторонний.

21.18. Диагональ AC параллелограмма $ABCD$ больше диагонали BD; описанная около треугольника BCD окружность пересекает диагональ AC в точке M. Докажите, что прямая BD является общей касательной к описанным окружностям треугольников ABM и ADM.

21.19. Остроугольный треугольник расположен внутри окружности. Докажите, что её радиус не меньше радиуса окружности, описанной около треугольника. Верно ли это утверждение для тупоугольного треугольника?

Вписанная и описанная окружности

21.20. Три окружности попарно касаются внешним образом в точках A, B и C. Докажите, что окружность, описанная около треугольника ABC, вписана в треугольник, вершины которого — центры этих окружностей.

21.21. Три окружности попарно касаются внешним образом в точках A, B и C. Докажите, что касательные к этим окружностям в точках A, B и C пересекаются в одной точке.

21.22. Три окружности, радиусы которых равны 1, 2 и 3, касаются друг друга извне. Найдите радиус окружности, проходящей через точки касания этих окружностей.

Вневписанные окружности

Комментарий. Если одна сторона треугольника и продолжения двух других сторон касаются окружности, то эту окружность называют *вневписанной*.

21.23. Докажите, что для каждой стороны треугольника существует вневписанная окружность, касающаяся этой стороны, и притом только одна.

21.24. Вневписанная окружность касается стороны BC треугольника ABC в точке K. Докажите, что $BK = \frac{1}{2}(AC + BC - AB)$.

21.25. Вневписанная окружность касается стороны BC треугольника ABC. Докажите, что расстояние от вершины A до точки касания с продолжением стороны равно полупериметру треугольника.

21.26. Докажите, что радиус вневписанной окружности, касающейся гипотенузы прямоугольного треугольника, равен его полупериметру.

21.27. Докажите, что точки, в которых касаются продолжений стороны треугольника две вневписанные окружности, равноудалены от середины этой стороны.

21.28. Докажите, что точки, в которых касаются стороны треугольника вписанная и вневписанная окружности, равноудалены от середины этой стороны.

21.29. На стороне BC треугольника ABC отмечена точка D, и в треугольники ABD и ACD вписаны окружности. Общая внешняя касательная к ним (отличная от прямой BC) пересекает отрезок AD в точке E. Докажите, что длина отрезка AE не зависит от положения точки D на стороне BC.

21.30. Докажите, что отрезок, соединяющий центры вписанной и вневписанной окружностей, делится описанной окружностью пополам.

21.31. Через данную точку проведите прямую, отсекающую от данного угла треугольник данного периметра.

Центры вписанной, описанной и вневписанной окружностей

21.32. Докажите, что центр окружности, вписанной в треугольник ABC, расположен внутри треугольника, образованного средними линиями треугольника ABC.

21.33. Из точки A проведены отрезки касательных AB и AC к окружности S. Докажите, что центр окружности, вписанной в треугольник ABC, лежит на окружности S.

21.34. В треугольнике ABC проведена биссектриса AD и из центра I вписанной окружности проведён перпендикуляр IE к стороне BC. Докажите, что $\angle BIE = \angle CID$.

21.35. Середина отрезка, соединяющего центры вписанной и описанной окружностей равнобедренного треугольника, лежит на его основании. Найдите углы этого треугольника.

21.36. Сторона BC треугольника ABC наименьшая. На лучах BA и CA отложены отрезки BD и CE, равные BC. Докажите, что радиус окружности, описанной около треугольника ADE, равен расстоянию между центрами окружности, описанной около треугольника ABC, и окружности, вписанной в него.

Комментарий. В задачах 21.37—21.41 будем обозначать I_a, I_b и I_c центры вневписанных окружностей, касающихся сторон BC, CA и AB треугольника ABC.

21.37. Докажите, что сторона BC треугольника ABC видна из центра I вписанной окружности под углом $90° + \frac{1}{2}\angle A$, а из центра I_a вневписанной окружности — под углом $90° - \frac{1}{2}\angle A$.

21.38. Докажите, что треугольник $I_aI_bI_c$ остроугольный.

21.39. Докажите, что отрезок I_aA — высота треугольника $I_aI_bI_c$.

21.40. Докажите, что высоты треугольника $I_aI_bI_c$ пересекаются в центре окружности, вписанной в треугольник ABC.

21.41. Из точки A проведены отрезки касательных AB и AC к окружности S. Докажите, что центр вневписанной окружности, касающейся стороны BC треугольника ABC, лежит на окружности S.

Вписанный и описанный четырёхугольники

21.42. Окружность высекает на сторонах выпуклого четырёхугольника равные хорды. Докажите, что в этот четырёхугольник можно вписать окружность.

21.43. В равнобедренную трапецию $ABCD$ ($AB = CD$) вписана окружность. Пусть M — точка касания окружности со стороной CD, K — точка пересечения окружности с отрезком AM, L — точка пересечения окружности с отрезком BM. Вычислите величину $\frac{AM}{AK} + \frac{BM}{BL}$.

21.44. Внутри вынуклого четырёхугольника $ABCD$ расположены четыре окружности одного радиуса так, что они имеют общую точку и каждая из них вписана в один из углов четырёхугольника. Докажите, что четырёхугольник $ABCD$ вписанный.

21.45. В четырёхугольник можно вписать окружность и около него можно описать окружность. Докажите, что отрезки, соединяющие точки касания противоположных сторон с вписанной окружностью, перпендикулярны.

21.46. Докажите, что если для вписанного четырёхугольника $ABCD$ выполнено равенство $CD = AD + BC$, то точка пересечения биссектрис углов A и B лежит на стороне CD.

21.47. Докажите, что если сумма противоположных углов выпуклого четырёхугольника равна 180°, то около него можно описать окружность.

21.48. Докажите, что если суммы противоположных сторон выпуклого четырёхугольника равны, то в него можно вписать окружность.

Теорема Птолемея

21.49. Четырёхугольник $ABCD$ вписанный. Докажите, что $AC \cdot BD = AB \cdot CD + AD \cdot BC$ (*теорема Птолемея*).

21.50. Биссектриса угла A треугольника ABC пересекает описанную окружность в точке D. Докажите, что $AB + AC < 2AD$.

21.51. На дуге CD описанной около квадрата $ABCD$ окружности отмечена точка P. Докажите, что $PA + PC = \sqrt{2}\,PB$.

21.52. Расстояния от центра окружности, описанной около остроугольного треугольника, до его сторон равны d_a, d_b и d_c. Докажите, что $d_a + d_b + d_c = R + r$, где R и r — радиусы описанной и вписанной окружностей.

21.53. Окружность, вписанная в треугольник, касается сторон BC, CA и AB в точках A_1, B_1 и C_1, точка Q — середина отрезка A_1B_1. Докажите, что $\angle B_1C_1C = \angle QC_1A_1$.

21.54. Окружность, проходящая через вершину A параллелограмма $ABCD$, пересекает отрезки AB, AC и AD в точках P, Q и R соответственно. Докажите, что $AP \cdot AB + AR \cdot AD = AQ \cdot AC$.

21.55. Докажите, что для любого четырёхугольника $ABCD$ выполняется неравенство $AC \cdot BD \leqslant AB \cdot CD + BC \cdot AD$ (***неравенство Птолемея***).

Соотношения в треугольнике

Отношение площадей подобных фигур равно квадрату коэффициента подобия.

Высоты треугольника или их продолжения пересекаются в одной точке (пример 2 на с. 93). Точку пересечения высот треугольника называют его *ортоцентром*. Треугольник, вершины которого — основания высот, называют *ортотреугольником*.

Теорема Чевы. Пусть точки A_1, B_1 и C_1 лежат на сторонах BC, CA и AB треугольника ABC или на их продолжениях. Прямые AA_1, BB_1 и CC_1 пересекаются в одной точке или параллельны тогда и только тогда, когда выполняется равенство

$$\frac{BA_1}{CA_1}\cdot\frac{CB_1}{AB_1}\cdot\frac{AC_1}{BC_1}=1$$

и на сторонах треугольника лежат либо все точки, либо только одна из этих точек.

Теорема Менелая. Пусть точки A_1, B_1 и C_1 лежат на сторонах BC, CA и AB треугольника ABC или на их продолжениях. Эти точки лежат на одной прямой тогда и только тогда, когда выполняется равенство

$$\frac{BA_1}{CA_1}\cdot\frac{CB_1}{AB_1}\cdot\frac{AC_1}{BC_1}=1$$

и на сторонах треугольника либо лежат две точки, либо не лежит ни одной из этих точек.

Пример 1 На боковых сторонах AB и CD трапеции $ABCD$ отмечены точки M и N так, что отрезок MN параллелен основаниям и делит площадь трапеции пополам. Найдите длину отрезка MN, если $BC = a$ и $AD = b$.

Решение. Пусть $MN = x$; E — точка пересечения прямых AB и CD. Треугольники EBC, EMN и EAD подобны, поэтому $S_{EBC} : S_{EMN} : S_{EAD} = a^2 : x^2 : b^2$. Для определённости будем считать, что $a < b$. Из равенств $S_{EMN} - S_{EBC} = S_{MBCN} = S_{MADN} = S_{EAD} - S_{EMN}$ следует, что $x^2 - a^2 = b^2 - x^2$, т. е. $x^2 = \frac{a^2+b^2}{2}$.

Ответ: $\sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}}$.

Пример 2 Докажите, что высоты треугольника или их продолжения пересекаются в одной точке.

Решение. Проведём через вершины треугольника ABC прямые, параллельные противоположным сторонам, и рассмотрим треугольник $A_1B_1C_1$, вершины которого — точки пересечения этих прямых (рис. 79). Точки A, B и C — середины сторон треугольника $A_1B_1C_1$, поэтому прямая, проходящая через точку A перпендикулярно прямой BC, — это серединный перпендикуляр к отрезку B_1C_1. Серединные перпендикуляры к сторонам треугольника $A_1B_1C_1$ пересекаются в одной точке.

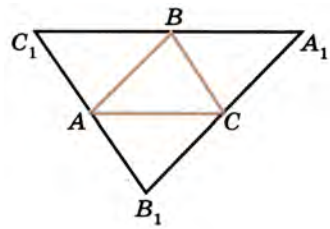


Рис. 79

Пример 3 Треугольник ABC остроугольный. Докажите, что биссектрисы ортотреугольника $A_1B_1C_1$ лежат на высотах треугольника ABC.

Решение. Согласно примеру 2 (с. 70) углы BA_1C_1 и CA_1B_1 равны (оба они равны углу A). Поэтому углы AA_1C_1 и AA_1B_1 тоже равны.

Задачи для самостоятельного решения

Отношение площадей подобных фигур

22.1. В остроугольном треугольнике ABC проведены высоты AA_1, BB_1 и CC_1. Докажите, что отношение площади треугольника $A_1B_1C_1$ к площади треугольника ABC равно $1 - \cos^2 A - \cos^2 B - \cos^2 C$.

22.2. Площадь выпуклого четырёхугольника $ABCD$ равна S. Найдите площадь четырёхугольника с вершинами в серединах его сторон.

22.3. На сторонах AB, BC и CA треугольника ABC отмечены точки D, E и F так, что $DE \parallel AC$ и $DF \parallel BC$. Найдите площадь треугольника ABC и площадь параллелограмма $CEDF$, если известны $S_1 = S_{ADF}$ и $S_2 = S_{BDE}$.

22.4. Через точку Q, расположенную внутри треугольника ABC, проведены три прямые, параллельные его сторонам. Они разбивают треугольник на шесть частей, три из которых — треугольники с площадями S_1, S_2 и S_3. Найдите площадь треугольника ABC.

22.5. Площадь треугольника ABC равна S. Найдите площадь треугольника, стороны которого равны медианам треугольника ABC.

Комментарий. В задачах 22.6—22.19 высоты треугольника ABC будем обозначать AA_1, BB_1 и CC_1, а точку пересечения высот или их продолжений будем обозначать H.

22.6. Докажите, что $AH \cdot A_1H = BH \cdot B_1H = CH \cdot C_1H$.

22.7. Треугольник ABC остроугольный. Докажите, что радиусы окружностей, описанных около треугольников ABC и AHC, равны.

22.8. Высоты остроугольного треугольника ABC пересекаются в точке H. Известно, что $AB = CH$. Найдите угол ACB.

22.9. Докажите, что высоты треугольника ABH или их продолжения пересекаются в точке C.

22.10. Треугольник ABC не прямоугольный. Докажите, что ровно один из треугольников ABC, HBC, AHC и ABH остроугольный.

22.11. Докажите, что радиус окружности, описанной около треугольника ABH, равен радиусу окружности, описанной около треугольника ABC.

22.12. Радиус окружности, описанной около треугольника ABC, равен R. Докажите, что $AH^2 + BC^2 = 4R^2$.

22.13. Докажите, что $AH = BC|\operatorname{ctg} A|$.

22.14. Найдите угол C треугольника ABC, для которого выполняется равенство $AB = CH$.

22.15. Отрезок AA_1 — диаметр описанной около треугольника ABC окружности. Докажите, что отрезок HA_1 делит сторону BC пополам.

22.16. Пусть O — центр окружности, описанной около треугольника ABC, M — середина стороны BC, P — середина отрезка AH. а) Докажите, что $AH = 2OM$. б) Докажите, что отрезок MP равен радиусу окружности, описанной около треугольника ABC.

22.17. Треугольник ABC остроугольный, точка O — центр описанной около него окружности. Докажите, что прямые AH и AO симметричны относительно биссектрисы угла A.

22.18. Треугольник ABC тупоугольный, точка O — центр описанной около него окружности. Докажите, что прямые AH и AO симметричны относительно биссектрисы угла A.

22.19. Точки C и D лежат на окружности с диаметром AB. Прямые AC и BD, AD и BC пересекаются в точках P и Q. Докажите, что прямые AB и PQ перпендикулярны.

Ортотреугольник

22.20. В треугольнике ABC угол C — тупой. Докажите, что биссектрисы внешних углов ортотреугольника $A_1B_1C_1$ с вершинами A_1 и B_1 и биссектриса угла $A_1C_1B_1$ проходят через вершины треугольника ABC и перпендикулярны сторонам этого треугольника.

22.21. Треугольник ABC остроугольный. Выразите углы ортотреугольника $A_1B_1C_1$ через углы треугольника ABC.

22.22. Угол C треугольника ABC тупой. Выразите углы ортотреугольника $A_1B_1C_1$ через углы треугольника ABC.

22.23. Какими могут быть углы треугольника ABC, если углы ортотреугольника $A_1B_1C_1$ равны α, β и γ?

22.24. Докажите, что отношение площади ортотреугольника $A_1B_1C_1$ к площади остроугольного треугольника ABC равно $2\cos A \cos B \cos C$.

22.25. Докажите, что отношение площади треугольника $A_1B_1C_1$ к площади остроугольного треугольника ABC равно $1 - \cos^2 A - \cos^2 B - \cos^2 C$.

22.26. Бильярдный шар из основания одной высоты остроугольного треугольника выпускают в направлении основания другой высоты. Докажите, что после отражений от двух сторон он вернётся в исходную точку.

22.27. Докажите, что периметр ортотреугольника равен $4R\sin A \sin B \sin C$, где R — радиус окружности, описанной около исходного треугольника ABC.

Теоремы Чевы и Менелая

22.28. На сторонах BC, CA и AB треугольника ABC или на их продолжениях отмечены точки A_1, B_1 и C_1, лежащие на одной прямой. Докажите, что

$$\frac{BA_1}{CA_1} \cdot \frac{CB_1}{AB_1} \cdot \frac{AC_1}{BC_1} = 1.$$

22.29. Из вершины C прямого угла треугольника ABC проведена высота CH, в треугольнике ACH проведена биссектриса CE. Прямая, проходящая через точку B параллельно CE, пересекает прямую CH в точке F. Докажите, что прямая EF делит отрезок AC пополам.

22.30. На сторонах BC, CA и AB треугольника ABC отмечены точки A_1, B_1 и C_1 так, что отрезки AA_1, BB_1 и CC_1 пересекаются в одной точке. Докажите, что

$$\frac{BA_1}{CA_1} \cdot \frac{CB_1}{AB_1} \cdot \frac{AC_1}{BC_1} = 1.$$

22.31. На сторонах BC, CA и AB треугольника ABC или на их продолжениях отмечены точки A_1, B_1 и C_1 так, что прямые AA_1, BB_1 и CC_1 пересекаются в одной точке. Докажите, что

$$\frac{BA_1}{CA_1} \cdot \frac{CB_1}{AB_1} \cdot \frac{AC_1}{BC_1} = 1.$$

22.32. На сторонах BC, CA и AB треугольника ABC или на их продолжениях отмечены точки A_1, B_1 и C_1 так, что прямые AA_1, BB_1 и CC_1 параллельны. Докажите, что

$$\frac{BA_1}{CA_1} \cdot \frac{CB_1}{AB_1} \cdot \frac{AC_1}{BC_1} = 1.$$

22.33. Точки P и Q расположены на отрезке AB. Докажите, что если $AP : BP = AQ : BQ$, то точки P и Q совпадают.

22.34. На сторонах BC, CA и AB треугольника ABC отмечены точки A_1, B_1 и C_1 так, что

$$\frac{BA_1}{CA_1} \cdot \frac{CB_1}{AB_1} \cdot \frac{AC_1}{BC_1} = 1.$$

Докажите, что отрезки AA_1, BB_1 и CC_1 пересекаются в одной точке.

22.35. Докажите, что отрезки, соединяющие вершины треугольника с точками касания вписанной в него окружности со сторонами, пересекаются в одной точке (*точка Жергонна*).

22.36. Докажите, что отрезки, соединяющие вершины треугольника с точками касания вневписанных окружностей со сторонами, пересекаются в одной точке (*точка Нагеля*).

22.37. На сторонах BC, CA и AB треугольника ABC отмечены точки A_1, B_1 и C_1 так, что отрезки AA_1, BB_1 и CC_1 пересекаются в одной точке. Точки A_2, B_2 и C_2 симметричны точкам A_1, B_1 и C_1 относительно середин соответствующих сторон треугольника. Докажите, что отрезки AA_2, BB_2 и CC_2 пересекаются в одной точке.

22.38. На сторонах BC, CA и AB треугольника ABC или на их продолжениях отмечены точки A_1, B_1 и C_1. Докажите, что

$$\frac{BA_1}{CA_1} \cdot \frac{CB_1}{AB_1} \cdot \frac{AC_1}{BC_1} = \frac{\sin BAA_1}{\sin CAA_1} \cdot \frac{\sin CBB_1}{\sin ABB_1} \cdot \frac{\sin ACC_1}{\sin BCC_1}.$$

22.39. Из вершин треугольника проведены лучи, которые делят его углы на следующие углы: 30° и 20°, 10° и 70°, 40° и 10° (рис. 80). Докажите, что эти лучи пересекаются в одной точке.

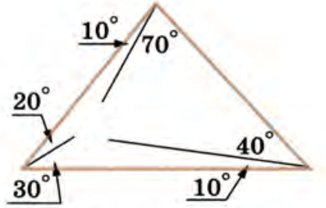


Рис. 80

22.40. Из вершин треугольника проведены лучи, которые делят его углы на следующие углы: 20° и 10°, 30° и 40°, 30° и 50° (рис. 81). Докажите, что эти лучи пересекаются в одной точке.

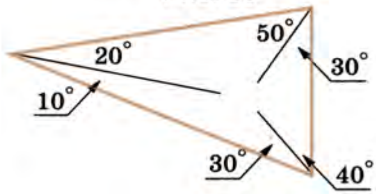


Рис. 81

22.41. На сторонах BC, CA и AB треугольника ABC отмечены точки A_1, B_1 и C_1 так, что отрезки AA_1, BB_1 и CC_1 пересекаются в одной точке. Лучи AA_2, BB_2 и CC_2 симметричны лучам AA_1, BB_1 и CC_1 относительно биссектрис соответствующих углов треугольника. Докажите, что лучи AA_2, BB_2 и CC_2 пересекаются в одной точке.

22.42. На сторонах BC, CA и AB треугольника ABC или на их продолжениях отмечены точки A_1, B_1 и C_1 так, что одна точка лежит на стороне, а две другие точки лежат на продолжениях сторон и $\frac{BA_1}{CA_1} \cdot \frac{CB_1}{AB_1} \cdot \frac{AC_1}{BC_1} = 1$.

Докажите, что прямые AA_1, BB_1 и CC_1 пересекаются в одной точке или параллельны.

22.43. Точки P и Q расположены на прямой AB вне отрезка AB. Докажите, что если $AP : BP = AQ : BQ$, то точки P и Q совпадают.

22.44. На сторонах BC, CA и AB треугольника ABC или на их продолжениях отмечены точки A_1, B_1 и C_1 так, что на сторонах треугольника либо лежат две точки, либо не лежит ни одной из этих точек и $\frac{BA_1}{CA_1} \cdot \frac{CB_1}{AB_1} \cdot \frac{AC_1}{BC_1} = 1$.

Докажите, что точки A_1, B_1 и C_1 лежат на одной прямой.

22.45. Докажите, что точки A_1, B_1 и C_1, в которых две биссектрисы углов треугольника ABC пересекают стороны и одна биссектриса внешнего угла пересекает продолжение стороны, лежат на одной прямой.

22.46. а) Серединный перпендикуляр к биссектрисе AD треугольника ABC пересекает прямую BC в точке E. Докажите, что $BE : CE = AB^2 : AC^2$.

б) Докажите, что точки пересечения серединных перпендикуляров к биссектрисам треугольника с продолжениями соответствующих сторон лежат на одной прямой.

Глава 23

Выпуклые и невыпуклые многоугольники

Фигуру, состоящую из отрезков A_1A_2, A_2A_3, ..., $A_{n-1}A_n$, называют *ломаной*. Будем предполагать, что соседние (смежные) отрезки ломаной не лежат на одной прямой. В таком случае отрезки называют *звеньями* ломаной. Если точки A_1 и A_n совпадают, то ломаную называют *замкнутой*. Если несмежные звенья ломаной не имеют общих точек, то ломаную называют *простой*.

***Многоугольник* — это простая замкнутая ломаная. *Стороны* многоугольника — это звенья ломаной, а *вершины* многоугольника — концы сторон.**

Многоугольник называют *выпуклым*, если он лежит по одну сторону от каждой прямой, содержащей его сторону.

***Углами* выпуклого многоугольника $A_1A_2A_3...A_n$ называют углы $A_nA_1A_2$, $A_1A_2A_3$, ..., $A_{n-1}A_nA_1$.**

Сумма углов выпуклого n-угольника равна $(n-2)\cdot 180°$.

Простая замкнутая ломаная разделяет плоскость на две части, одна из которых ограниченная (*внутренняя* область многоугольника), а другая неограниченная (*внешняя* область многоугольника). Это утверждение мы не доказываем (его доказательство весьма непростое), но будем им иногда пользоваться.

Пример 1 Докажите, что если диагонали четырёхугольника пересекаются, то этот четырёхугольник выпуклый.

Решение. Пусть диагонали AC и BD четырёхугольника $ABCD$ пересекаются в точке O. Тогда точки C и D лежат по одну сторону от прямой AB (по ту же сторону, что и точка O). Поэтому четырёхугольник $ABCD$ лежит по одну сторону от прямой AB.

Пример 2 Докажите, что если четырёхугольник $ABCD$ выпуклый, то его диагонали пересекаются.

Решение. Точка C лежит в полуплоскости с границей AB, содержащей точку D, и в полуплоскости с границей AD, содержащей точку B. Поэтому точка C лежит внутри угла BAD, и, следовательно, луч AC пересекает отрезок BD. Аналогично луч BD пересекает отрезок AC. Следовательно, точка пересечения прямых AC и BD лежит как на отрезке AC, так и на отрезке BD.

Пример 3 Докажите, что четырёхугольник невыпуклый тогда и только тогда, когда его диагонали не пересекаются.

Решение. Предположим сначала, что четырёхугольник невыпуклый. Тогда согласно примеру 1 (с. 98) его диагонали не могут пересекаться. Предположим теперь, что диагонали четырёхугольника не пересекаются. Тогда согласно примеру 2 (с. 98) этот четырёхугольник не может быть выпуклым.

Пример 4 Сколько всего диагоналей у n-угольника?

Решение. Из каждой вершины n-угольника выходит $n - 3$ диагонали. Если посчитать диагонали, выходящие из n вершин, то получим $n(n - 3)$ диагонали, но при этом каждая диагональ будет посчитана дважды, поскольку она выходит из двух вершин.

Ответ: $\frac{n(n-3)}{2}$.

Задачи для самостоятельного решения

Ломаные

23.1. Проведите прямую, имеющую общие точки со всеми звеньями пятиконечной звезды. Может ли такая прямая не проходить через вершины звезды?

23.2. На рисунке 82, *а* отмечены четыре точки. Сколько всего: а) замкнутых ломаных; б) незамкнутых ломаных с вершинами в этих точках?

23.3. На рисунке 82, *б* отмечены пять точек. Сколько всего: а) замкнутых ломаных; б) незамкнутых ломаных с вершинами в этих точках?

23.4. Нарисуйте замкнутую шестизвенную ломаную, которая пересекает каждое своё звено ровно в одной точке.

23.5. Нарисуйте замкнутую десятизвенную ломаную, которая пересекает каждое своё звено ровно в одной точке.

а)

б)

Рис. 82

23.6. Замкнутая ломаная пересекает каждое своё звено ровно один раз. Докажите, что число звеньев чётно.

23.7. Нарисуйте замкнутую восьмизвенную ломаную, которая пересекает каждое своё звено ровно в одной точке.

23.8. Нарисуйте замкнутую семизвенную ломаную, которая пересекает каждое своё звено ровно два раза.

23.9. Нарисуйте замкнутую девятизвенную ломаную, которая пересекает каждое своё звено ровно два раза.

Выпуклый четырёхугольник

23.10. Могут ли все углы выпуклого четырёхугольника быть острыми?

23.11. Может ли один из углов выпуклого четырёхугольника быть больше суммы трёх остальных углов?

23.12. Докажите, что диагонали выпуклого четырёхугольника перпендикулярны тогда и только тогда, когда суммы квадратов его противоположных сторон равны.

23.13. Докажите, что отрезок, соединяющий середины противоположных сторон выпуклого четырёхугольника, делит его диагонали в равных отношениях.

23.14. Найдите все выпуклые четырёхугольники, площадь которых можно вычислять по формуле $\frac{(a+c)(b+d)}{4}$, где a, b, c, d — длины сторон в порядке обхода.

23.15. Из любого ли выпуклого четырёхугольника можно вырезать параллелограмм, три вершины которого являются вершинами этого четырёхугольника?

23.16. Докажите, что трапеция — выпуклый четырёхугольник.

23.17. В выпуклом четырёхугольнике $ABCD$ биссектрисы углов CAD и CBD пересекаются на стороне CD. Докажите, что биссектрисы углов ACB и ADB пересекаются на стороне AB.

23.18. Окружность касается сторон угла A вынуклого четырёхугольника $ABCD$ и продолжений его сторон BC и CD. Докажите, что $AB + BC = AD + DC$.

23.19. Прямая, проходящая через середины противоположных сторон выпуклого четырёхугольника, образует равные углы с его диагоналями. Докажите, что диагонали равны.

23.20. В выпуклом четырёхугольнике $ABCD$ равны стороны AB и CD и углы A и C. Обязательно ли этот четырёхугольник — параллелограмм?

Неравенства для выпуклого четырёхугольника

23.21. Докажите, что сумма противоположных сторон выпуклого четырёхугольника меньше суммы длин его диагоналей.

23.22. Докажите, что сумма диагоналей выпуклого четырёхугольника больше его полупериметра.

23.23. Угол A треугольника ABC равен 60°. Докажите, что

$$AB + AC \leqslant 2BC.$$

23.24. Найдите точку, сумма расстояний от которой до вершин выпуклого четырёхугольника наименьшая.

23.25. Внутри выпуклого четырёхугольника $ABCD$ отмечена точка O. Докажите, что

$$AO + OB < AD + DC + CB.$$

23.26. Докажите, что сумма расстояний от точки внутри выпуклого четырёхугольника периметра P до его вершин меньше $\frac{3}{2}P$.

Невыпуклый четырёхугольник

23.27. Докажите, что невыпуклый четырёхугольник $ABCD$ лежит по одну сторону от одной диагонали и по разные стороны от другой диагонали.

23.28. Докажите, что одна из вершин невыпуклого четырёхугольника лежит внутри треугольника, образованного тремя другими вершинами.

23.29. Вершина D невыпуклого четырёхугольника $ABCD$ лежит внутри треугольника ABC. Докажите, что

$$\angle BAD + \angle ABC + \angle DCB = \angle ADC.$$

23.30. Могут ли четыре данные точки быть вершинами разных четырёхугольников?

23.31. Можно ли невыпуклый четырёхугольник разрезать двумя прямыми на шесть частей?

Пятиугольник

23.32. Докажите, что сумма длин диагоналей выпуклого пятиугольника меньше его удвоенного периметра, но больше периметра.

23.33. Все стороны выпуклого пятиугольника $ABCDE$ равны, и угол ABC вдвое больше угла DBE. Найдите угол ABC.

23.34. Стороны AE и BC выпуклого пятиугольника $ABCDE$, вписанного в окружность, параллельны. Прямые BC и DE пересекаются в точке K. Докажите, что

$$DK \cdot DA = DC \cdot DB.$$

23.35. Каждая диагональ выпуклого пятиугольника $ABCDE$ отсекает от него треугольник, площадь которого равна 1. Найдите площадь пятиугольника.

23.36. Можно ли выпуклый пятиугольник разрезать на несколько параллелограммов?

23.37. Существуют ли два пятиугольника, у которых все вершины общие, но нет ни одной общей стороны?

23.38. Пятиугольник $ABCDE$ вписан в окружность. Расстояния от точки E до прямых AB, BC и CD равны a, b и c. Найдите расстояние от точки E до прямой AD.

Произвольные многоугольники

23.39. Выпуклый n-угольник разрезан непересекающимися диагоналями на треугольники. Докажите, что количество этих треугольников равно $n - 2$.

23.40. Существует ли многоугольник с вершинами в 16 точках, отмеченных на рисунке 83? (Обратите внимание, что вершины многоугольника не могут лежать на его сторонах.)

Рис. 83

23.41. Может ли прямая, не проходящая через вершины n-угольника, пересекать все его стороны: а) если n чётно; б) если n нечётно?

23.42. Нарисуйте многоугольник и точку внутри его так, чтобы ни одна сторона многоугольника не была видна из неё полностью.

23.43. Нарисуйте многоугольник и точку вне его так, чтобы ни одна сторона многоугольника не была видна из неё полностью.

23.44. Все углы выпуклого шестиугольника $ABCDEF$ равны. Докажите, что

$$|AB - DE| = |BC - FE| = |CD - AF|.$$

23.45. Найдите сумму внешних углов выпуклого многоугольника. (Для каждого угла многоугольника берётся только один из двух равных внешних углов.)

23.46. Какое наибольшее число острых углов может иметь выпуклый многоугольник?

Движения

Движение плоскости — это отображение плоскости на себя, сохраняющее расстояния между точками.

Точки X и X_1 *симметричны относительно точки O*, если O — середина отрезка XX_1. Точка O симметрична самой себе относительно точки O. *Симметрия относительно точки O* — это преобразование плоскости, при котором каждая точка переходит в симметричную ей относительно точки O. Точку O называют *центром симметрии*. Симметрию с центром O называют также *центральной симметрией*.

Если фигура переходит в себя при симметрии относительно точки O, то точку O называют *центром симметрии* фигуры.

Точки X и X_1 *симметричны относительно прямой l*, если отрезок XX_1 перпендикулярен прямой l и середина этого отрезка лежит на прямой l. Точка прямой l симметрична самой себе относительно прямой l. *Симметрия относительно прямой l* — это отображение плоскости на себя, при котором каждая точка переходит в симметричную ей относительно прямой l. Прямую l называют *осью симметрии*. Симметрию с осью l называют также *осевой симметрией*.

Если фигура переходит в себя при симметрии относительно прямой l, то прямую l называют *осью симметрии* фигуры.

***Параллельный перенос* — это отображение плоскости на себя, при котором точки перемещаются в данном направлении на данное расстояние. Это означает, что если точка A переходит в точку A_1 и точка B не лежит на прямой AA_1, то точка B переходит в такую точку B_1, что четырёхугольник AA_1B_1B — параллелограмм (рис. 84).**

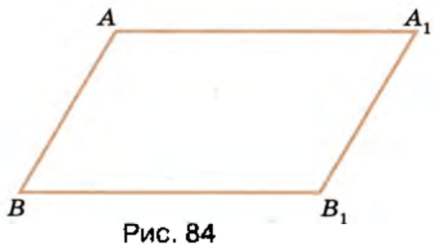


Рис. 84

Поворот с центром O на угол α — это отображение плоскости на себя, при котором точка O остаётся на месте, а каждая точка A, отличная от O, отображается в такую точку A_1, что $OA_1 = OA$ и $\angle AOA_1 = \alpha$, т. е. отрезок OA поворачивается на угол α; при этом все отрезки поворачиваются в одну и ту же сторону — либо против часовой стрелки, либо по часовой стрелке.

Симметрия относительно точки, симметрия относительно прямой, параллельный перенос и поворот — движения плоскости.

Движение плоскости переводит окружность в окружность того же радиуса.

Композицией двух движений называют их последовательное выполнение: сначала выполняется первое движение, а затем — второе. Композиция движений является движением.

Пример 1 Дан параллелограмм $ABCD$ и точка M. Через точки A, B, C и D проведены прямые, параллельные прямым MC, MD, MA и MB соответственно. Докажите, что они пересекаются в одной точке.

Решение. Рассмотрим точку M_1, симметричную точке M относительно точки пересечения диагоналей параллелограмма. Прямая M_1A параллельна прямой MC, поэтому прямая, проведённая через точку A параллельно прямой MC, проходит через точку M_1. Три другие прямые тоже проходят через точку M_1.

Пример 2 На биссектрисе внешнего угла C треугольника ABC отмечена точка M, отличная от точки C. Докажите, что

$$AM + BM > AC + BC.$$

Решение. Рассмотрим точку B_1, симметричную точке B относительно биссектрисы внешнего угла C. Эта точка лежит на продолжении стороны AC за точку C (рис. 85). Поэтому

$$AM + BM = AM + MB_1 > AB_1 = AC + CB_1 = AC + BC.$$

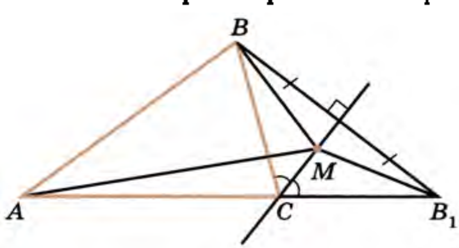


Рис. 85

Пример 3 Через точку пересечения диагоналей квадрата проведены две перпендикулярные прямые. Докажите, что их точки пересечения со сторонами квадрата — вершины квадрата.

Решение. При повороте на 90° с центром в точке пересечения диагоналей указанные точки переходят друг в друга. Четыре точки, переходящие друг в друга при повороте на 90°, являются вершинами квадрата, диагонали которого пересекаются в центре поворота.

Задачи для самостоятельного решения

Центральная симметрия

24.1. Окружность пересекает стороны BC, CA, AB треугольника ABC в точках A_1 и A_2, B_1 и B_2, C_1 и C_2 соответственно. Докажите, что если перпендикуляры к сторонам треугольника, проведённые через точки A_1, B_1 и C_1, пересекаются в одной точке, то и перпендикуляры к сторонам, проведённые через точки A_2, B_2 и C_2, тоже пересекаются в одной точке.

24.2. Вершины выпуклого четырёхугольника лежат на окружности. Докажите, что прямые, проведённые через середины его сторон перпендикулярно противоположным сторонам, пересекаются в одной точке.

24.3. Окружности S_1 и S_2 радиуса 1 касаются в точке A; центр O окружности S радиуса 2 принадлежит S_1. Окружность S_1 касается окружности S в точке B. Докажите, что прямая AB проходит через точку пересечения окружностей S_2 и S.

24.4. Может ли выпуклый семиугольник иметь центр симметрии?

24.5. Докажите, что выпуклый многоугольник не может иметь более одного центра симметрии.

24.6. Двое игроков поочерёдно выкладывают на прямоугольный стол круглые монеты. Монету разрешается класть только на свободное место. Проигрывает тот, кто не может сделать очередной ход. Докажите, что игрок, делающий первый ход, всегда может выиграть.

24.7. Точка P — середина стороны AB выпуклого четырёхугольника $ABCD$. Докажите, что если площадь треугольника PCD равна половине площади четырёхугольника $ABCD$, то $BC \parallel AD$.

24.8. Докажите, что замкнутую ломаную длиной 4 можно поместить в круг радиуса 1.

Осевая симметрия

24.9. Точка, симметричная вершине C прямоугольного треугольника ABC относительно гипотенузы AB, лежит на продолжении одной из средних линий. Найдите углы этого треугольника.

24.10. Точки A и B окружности с центром O лежат по одну сторону от диаметра окружности, на котором отмечена точка M так, что прямые AM и BM образуют равные углы с этим диаметром. Докажите, что

$$\angle AOB = \angle AOM.$$

24.11. Угол A треугольника ABC острый, AE — биссектриса, BH — высота. Известно, что $\angle AEB = 45°$. Найдите угол EHC.

24.12. Прямая касается окружности, описанной около треугольника ABC, в точке A и пересекает прямую BC в точке E; отрезок AD — биссектриса треугольника ABC. Докажите, что прямая, проходящая через точку D параллельно прямой AE, касается окружности, вписанной в треугольник ABC.

24.13. Угол A выпуклого четырёхугольника $ABCD$ прямой. Докажите, что

$$BC + CD + DB > 2AC.$$

24.14. Внутри острого угла BOC отметили произвольную точку A и отразили симметрично относительно сторон угла. В результате получили точки B_1 и C_1. Докажите, что величина угла B_1OC_1 не зависит от выбора точки A.

24.15. Внутри острого угла BOC отмечена произвольная точка A. Докажите, что из точки A можно выпустить бильярдный шар так, чтобы он, отразившись дважды от сторон угла, вернулся в исходную точку.

Свойства осей симметрии

24.16. Сколько осей симметрии у отрезка? Опишите их.

24.17. Докажите, что ось симметрии треугольника проходит через вершину и перпендикулярна противолежащей стороне.

24.18. Может ли треугольник иметь ровно две оси симметрии?

24.19. Четырёхугольник имеет ось симметрии. Докажите, что он либо симметричен относительно диагонали, либо является равнобедренной трапецией или прямоугольником.

24.20. Докажите, что если ось симметрии четырёхугольника проходит через одну какую-нибудь его вершину, то она проходит и через другую вершину.

24.21. Сколько осей симметрии может иметь четырёхугольник?

24.22. Докажите, что если у семнадцатиугольника есть ось симметрии, то она проходит через одну из его вершин.

Параллельный перенос

24.23. Две окружности радиуса R касаются в точке K. На одной из них отмечена точка A, на другой — точка B. Докажите, что если $\angle AKB = 90°$, то $AB = 2R$.

24.24. Две окружности радиуса R пересекаются в точках M и N. Пусть A и B — точки пересечения серединного перпендикуляра к отрезку MN с этими окружностями, лежащие по одну сторону от прямой MN. Докажите, что $MN^2 + AB^2 = 4R^2$.

24.25. Внутри прямоугольника $ABCD$ отмечена точка M. Докажите, что существует выпуклый четырёхугольник, диагонали которого перпендикулярны и равны AB и BC, а стороны равны AM, BM, CM и DM.

Поворот на 90°

24.26. На сторонах BC и CD квадрата $ABCD$ отмечены точки M и K соответственно, причём $\angle BAM = \angle MAK$. Докажите, что

$$BM + KD = AK.$$

24.27. В треугольнике ABC проведены медиана CM и высота CH. Прямые, проведённые через произвольную точку P плоскости перпендикулярно прямым CA, CM и CB, пересекают прямую CH в точках A_1, M_1 и B_1. Докажите, что $A_1M_1 = B_1M_1$.

24.28. Квадраты $OABC$ и $ODEF$ имеют общую вершину O (рис. 86). Докажите, что медиана OM треугольника AOF и высота OH треугольника COD лежат на одной прямой.

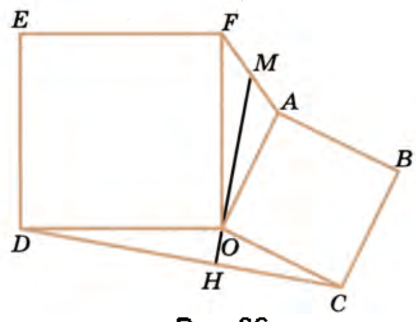


Рис. 86

24.29. Внутри квадрата $A_1A_2A_3A_4$ отмечена точка P. Через вершины A_1, A_2, A_3 и A_4 проведены прямые, перпендикулярные соответственно прямым A_2P, A_3P, A_4P и A_1P. Докажите, что все четыре проведённые прямые пересекаются в одной точке.

24.30. На сторонах CB и CD квадрата $ABCD$ отмечены точки M и K так, что периметр треугольника CMK равен удвоенной стороне квадрата. Найдите угол MAK.

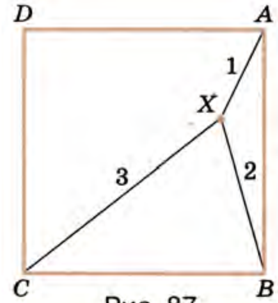


Рис. 87

24.31. Внутри квадрата $ABCD$ отмечена точка X так, что $AX = 1$, $BX = 2$ и $CX = 3$ (рис. 87). Найдите угол AXB.

Поворот на 60°

24.32. На отрезке AE отмечена точка C и по одну сторону от него построены равносторонние треугольники ABC и CDE; точки M и P — середины отрезков AD и BE. Докажите, что треугольник CPM равносторонний.

24.33. На сторонах треугольника ABC внешним образом построены равносторонние треугольники A_1BC, AB_1C и ABC_1. Докажите, что

$$AA_1 = BB_1 = CC_1.$$

24.34. Вершины равностороннего треугольника ABC лежат на окружности. На дуге AB этой окружности отмечена точка D. Докажите, что

$$AD + BD = CD.$$

24.35. Найдите множество всех точек M, лежащих внутри равностороннего треугольника ABC, для которых

$$MA^2 = MB^2 + MC^2.$$

24.36. На сторонах треугольника ABC внешним образом построены равносторонние треугольники A_1BC, AB_1C и ABC_1, точки P и Q — середины отрезков A_1C_1 и A_1B_1. Докажите, что треугольник APQ равносторонний.

Композиции движений

24.37. Докажите, что композиция двух центральных симметрий — это параллельный перенос.

24.38. Зависит ли результат от того, в каком порядке выполняются симметрии относительно двух данных точек?

24.39. Докажите, что композиция двух симметрий относительно параллельных прямых — это параллельный перенос.

24.40. Зависит ли результат от того, в каком порядке выполняются симметрии относительно двух данных параллельных прямых?

24.41. Докажите, что композиция двух симметрий относительно перпендикулярных прямых — это симметрия относительно точки пересечения прямых.

24.42. Докажите, что если фигура имеет две взаимно перпендикулярные оси симметрии, то она имеет центр симметрии.

24.43. Фигура имеет оси симметрии l и m. Прямая n симметрична прямой l относительно оси m. Докажите, что прямая n также является осью симметрии фигуры.

24.44. Докажите, что если фигура имеет ровно две оси симметрии, то эти оси взаимно перпендикулярны.

24.45. Существует ли фигура, имеющая ровно две оси симметрии, но не имеющая центра симметрии?

24.46. Докажите, что композиция двух симметрий относительно пересекающихся прямых — это поворот на угол, вдвое больший угла между прямыми, с центром в точке пересечения прямых.

24.47. Зависит ли результат от того, в каком порядке выполняются симметрии относительно двух данных пересекающихся прямых? Для каких прямых результат не зависит от порядка?

Подобие

Центральное подобие (или *гомотетия*) с центром O и положительным коэффициентом k — это отображение плоскости на себя, при котором точка A переходит в такую точку A_1 луча OA, что $OA_1 = kOA$. Гомотетия с отрицательным коэффициентом k — это композиция гомотетии с коэффициентом $|k|$ и симметрии с центром O. При гомотетии с отрицательным коэффициентом точка A переходит не в точку луча OA, а в точку его продолжения.

При гомотетии с коэффициеитом k окружность радиуса R переходит в окружность радиуса $|k|R$.

Преобразование подобия с положительным коэффициентом k — это отображение плоскости на себя, при котором точки A и B переходят в такие точки A_1 и B_1, что $A_1B_1 = kAB$.

Две фигуры называют *подобными* с коэффициентом k, если одну фигуру можно перевести в другую преобразованием подобия с коэффициентом k.

Задачи для самостоятельного решения

Гомотетия

25.1. Докажите, что точки, симметричные произвольной точке относительно середин сторон квадрата, являются вершинами некоторого квадрата.

25.2. На плоскости даны точки A и B и прямая l. По какой траектории движется точка пересечения медиан треугольника ABC, если точка C движется по прямой l?

25.3. Четырёхугольник разрезан диагоналями на четыре треугольника. Докажите, что точки пересечения медиан этих треугольников являются вершинами параллелограмма.

25.4. Докажите, что середины оснований трапеции, точка пересечения её диагоналей и точка пересечения продолжений боковых сторон лежат на одной прямой.

25.5. Докажите, что три прямые, проведённые через середины сторон треугольника параллельно биссектрисам противолежащих углов, пересекаются в одной точке.

25.6. Медианы AA_1, BB_1 и CC_1 треугольника ABC пересекаются в точке M; P — произвольная точка. Прямая l_a проходит через точку A параллельно прямой PA_1; прямые l_b и l_c определяются аналогично. Докажите, что: а) прямые l_a, l_b и l_c пересекаются в одной точке Q; б) точка M лежит на отрезке PQ, причём $PM : MQ = 1 : 2$.

Гомотетичные окружности

25.7. Две окружности касаются в точке K. Прямая, проходящая через точку K, пересекает эти окружности в точках A и B. Докажите, что касательные к окружностям, проведённые через точки A и B, параллельны.

25.8. Две окружности касаются в точке K. Через точку K проведены две прямые, пересекающие первую окружность в точках A и B, вторую — в точках C и D. Докажите, что $AB \parallel CD$.

25.9. Каждая из трёх окружностей касается двух сторон угла, вторая окружность касается внешним образом первой и третьей. Радиусы первой и третьей окружностей равны 2 и 18. Найдите радиус второй окружности.

25.10. На окружности фиксированы точки A и B, а точка C движется по этой окружности. Найдите геометрическое место точек пересечения медиан треугольников ABC.

25.11. Две окружности касаются внешним образом в точке A, радиусы окружностей равны r и R. Найдите длину отрезка касательной, проведённой к окружности радиуса r из точки B, лежащей на окружности радиуса R, если $AB = a$.

25.12. Две окружности касаются внутренним образом в точке A, радиусы окружностей равны r и R ($r < R$). Найдите длину отрезка касательной, проведённой к окружности радиуса r из точки B, лежащей на окружности радиуса R, если $AB = a$.

25.13. Продолжения сторон AB и CD четырёхугольника $ABCD$, вписанного в окружность S, пересекаются в точке P, а продолжения сторон BC и AD — в точке Q. Биссектриса угла APD пересекает сторону AD в точке K, биссектриса угла AQB пересекает сторону AB в точке L. Докажите, что окружность S и окружность, описанная вокруг треугольника AKL, касаются.

25.14. Радиусы двух данных окружностей различны, и их центры не совпадают. Докажите, что существуют ровно две гомотетии, переводящие первую окружность во вторую.

Окружность Эйлера и прямая Эйлера

Прямая Эйлера — это прямая, на которой лежат ортоцентр треугольника, центр описанной окружности, точка пересечения медиан (задача 25.15).

Окружность Эйлера — это окружность, на которой лежат следующие девять точек: середины сторон треугольника, основания высот и середины отрезков, соединяющих ортоцентр с вершинами (задачи 25.16 и 25.19).

Окружность Эйлера называют также *окружностью девяти точек.*

Центр окружности Эйлера — середина отрезка, соединяющего ортоцентр с центром описанной окружности. Эта точка тоже лежит на прямой Эйлера (задача 25.17). Радиус окружности Эйлера равен половине радиуса описанной окружности (задача 25.17).

Комментарий. Для треугольника ABC будем использовать следующие обозначения: A_1, B_1, C_1 — середины сторон BC, CA, AB; A_2, B_2, C_2 — основания высот, проведённых из вершин A, B, C; H — ортоцентр; A_3, B_3, C_3 — середины отрезков AH, BH, CH; M — точка пересечения медиан; O — центр описанной окружности.

25.15. Докажите, что точки H, O и M лежат на одной прямой.

25.16. Докажите, что середины сторон треугольника и основания высот лежат на одной окружности S.

25.17. Докажите, что центр окружности S из задачи 25.16 — это середина отрезка OH, где O — центр описанной окружности, а радиус окружности S равен половине радиуса описанной окружности.

25.18. Докажите, что треугольники ABC, HBC, AHC и ABH имеют общую окружность Эйлера.

25.19. Докажите, что середины отрезков AH, BH и CH лежат на окружности S из задачи 25.16.

Подобные многоугольники

25.20. Прямая, параллельная основаниям трапеции, разбивает её на две подобные трапеции. Найдите отрезок этой прямой, заключённый внутри трапеции, если основания равны a и b.

25.21. Стороны трапеций $ABCD$ и $A_1B_1C_1D_1$ с основаниями AD и A_1D_1 соответственно пропорциональны. Докажите, что эти трапеции подобны.

25.22. Докажите, что выпуклые четырёхугольники подобны, если их соответственные углы равны и соответственные углы между диагоналями тоже равны.

Глава 26
Методы решения задач на построение

Для решения задач на построение применяются разные методы. Задачи этой главы решаются **методом геометрических мест точек** и с помощью движений и преобразований подобия.

В простейшем виде метод геометрических мест точек заключается в том, что искомая точка строится как точка пересечения двух геометрических мест точек, которым она должна принадлежать по условию. Иногда строится какое-либо вспомогательное геометрическое место точек, что позволяет свести задачу к более простой.

Движения и преобразования подобия часто позволяют свести задачу на построение к более простой задаче. Важнейший частный случай применения преобразований подобия — метод подобия. Он основан на том, что сначала строится произвольная фигура, подобная искомой, а затем выполняется преобразование подобия с известным коэффициентом подобия.

Пример 1 Постройте треугольник ABC по стороне $BC = a$, высоте h_a, проведённой из вершины A, и радиусу R описанной около треугольника окружности.

Решение. Построим отрезок BC длины a. Центр описанной около треугольника ABC окружности — это точка пересечения двух окружностей радиуса R с центрами в точках B и C. Выберем одну из этих точек пересечения и построим описанную около треугольника ABC окружность S. Точка A — это точка пересечения окружности S и прямой, параллельной прямой BC и отстоящей от неё на расстояние h_a (таких прямых две).

Пример 2 Постройте прямую, параллельную данной прямой l, на которой стороны данного угла ABC высекают отрезок данной длины a.

Решение. Построим на данной прямой отрезок длины a и рассмотрим два параллельных переноса, переводящие друг в друга концы этих отрезков. Искомая прямая проходит через точку пересечения луча BA с образами луча BC при этих параллельных переносах.

Пример 3 Через общую точку A окружностей S_1 и S_2 проведите прямую так, чтобы эти окружности высекали на ней равные (но не совпадающие) хорды.

Решение. Построим точку B, в которой пересекаются окружность S_1 и окружность, симметричная окружности S_2 относительно точки A. Прямая AB пересекает окружность S_2 в точке, симметричной точке B относительно точки A, поэтому прямая AB обладает требуемым свойством. Наоборот, если прямая, обладающая требуемым свойством, пересекает окружность S_1 в точках A и C, то точка, симметричная точке C относительно точки A, лежит на окружности S_2, поэтому точка C совпадает с точкой B.

Пример 4 Постройте треугольник ABC по углам A и B ($\angle A < \angle B$) и разности $AC - BC$.

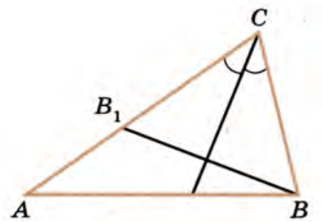


Рис. 88

Решение. Пусть точка B_1 симметрична точке B относительно биссектрисы угла C (рис. 88). В треугольнике ABB_1 известна сторона $AB_1 = AC - BC$ и углы при этой стороне: $\angle BAB_1 = \angle A$ и $\angle AB_1B = 180° - \frac{\angle A + \angle B}{2}$. Построим этот треугольник и проведём серединный перпендикуляр к его стороне BB_1. Вершина C — это точка пересечения этого серединного перпендикуляра и прямой AB_1.

Пример 5 Постройте треугольник по двум углам A, B и периметру P.

Решение. Построим произвольный треугольник с углами A и B и найдём его периметр P_1. Искомый треугольник подобен построенному треугольнику с коэффициентом $\frac{P}{P_1}$.

Задачи для самостоятельного решения

Метод геометрических мест точек

26.1. Постройте окружность данного радиуса r, касающуюся данной прямой и данной окружности.

26.2. Через данную точку A проведите окружность, касающуюся данной прямой l в данной точке B.

26.3. Постройте хорду данной окружности, равную и параллельную данному отрезку.

26.4. Через данную точку проведите прямую, на которой данная окружность высекает хорду данной длины.

26.5. Через данную точку P внутри данной окружности проведите хорду так, чтобы разность длин отрезков, на которые точка P делит хорду, имела данную величину a.

26.6. Постройте точку, из которой две данные окружности видны под данными углами.

26.7. Постройте треугольник ABC по данной стороне BC, данному углу A и данной медиане $CC_1 = m_c$.

26.8. Постройте треугольник ABC по углу A и медианам $BB_1 = m_b$ и $CC_1 = m_c$.

Параллельный перенос

26.9. Даны две окружности S_1, S_2 и прямая l. Проведите прямую l_1, параллельную прямой l, так, чтобы расстояние между точками пересечения l_1 с окружностями S_1 и S_2 имело заданную величину a.

26.10. Даны две окружности S_1, S_2 и прямая l. Проведите прямую l_1, параллельную прямой l, так, чтобы окружности S_1 и S_2 высекали на прямой l_1 равные хорды.

26.11. Даны непересекающиеся хорды AB и CD окружности. Постройте точку X окружности так, чтобы хорды AX и BX высекали на хорде CD отрезок EF, имеющий данную длину a.

26.12. Постройте четырёхугольник $ABCD$ по четырём углам и длинам сторон $AB = a$ и $CD = b$.

26.13. Даны окружности S_1, S_2 и точка A. Проведите через точку A прямую l так, чтобы окружности S_1 и S_2 высекали на ней равные хорды.

26.14. Даны окружности S_1 и S_2, пересекающиеся в точках A и B. Проведите через точку A прямую l так, чтобы отрезок этой прямой, заключённый внутри окружностей S_1 и S_2, имел данную длину.

Симметрия относительно точки

26.15. Через данную точку A проведите прямую так, чтобы отрезок, заключённый между точками пересечения её с данной прямой и данной окружностью, делился точкой A пополам.

26.16. Даны угол ABC и точка D внутри его. Постройте отрезок с концами на сторонах данного угла, середина которого находится в точке D.

26.17. Даны две концентрические окружности S_1 и S_2. Проведите прямую, на которой эти окружности высекают три равных отрезка.

26.18. Две окружности пересекаются в точке A. Постройте отрезок, концы которого лежат на окружностях, а точка A является его серединой.

Осевая симметрия

26.19. Даны прямая l и точки A и B, лежащие по одну сторону от неё. Постройте на прямой l точку M так, чтобы сумма длин отрезков AM и MB была наименьшей.

26.20. Постройте треугольник ABC по стороне AB, высоте h, проведённой к этой стороне, и разности углов A и B.

26.21. Даны пересекающиеся прямые a и b, на них отмечены точки D и E. Постройте треугольник ABC, вершины A и B которого лежат на прямых a и b, а отрезки AD и BE являются его биссектрисами.

26.22. Даны прямые a, b и c, пересекающиеся в одной точке, и точка A на прямой a. Постройте треугольник, биссектрисы которого лежат на данных прямых.

Подобие

26.23. Постройте треугольник по трём медианам.

26.24. Постройте треугольник по трём высотам.

26.25. Впишите в данный остроугольный треугольник ABC квадрат $KLMN$ так, чтобы вершины K и N лежали на сторонах AB и AC, а вершины L и M — на стороне BC.

26.26. Даны угол ABC и точка M внутри его. Постройте окружность, касающуюся сторон угла и проходящую через точку M.

26.27. Впишите в треугольник две равные окружности, каждая из которых касается двух сторон треугольника и другой окружности.

26.28. Даны окружность и её хорда. Постройте квадрат, две соседние вершины которого лежат на хорде, а две другие — на окружности.

26.29. Даны окружность и её хорда. Постройте квадрат, одна сторона которого лежит на хорде, а противоположная сторона касается окружности.

26.30. Одна окружность лежит внутри другой, и их центры не совпадают. Постройте центр гомотетии, переводящей одну окружность в другую.

Глава 27
Координаты

Ось координат — это прямая, на которой отмечена некоторая точка O (*начало координат*) и, кроме того, выбран один из двух лучей с началом O (*положительная полуось*). *Координата* точки M, лежащей на оси координат, — это длина отрезка OM, взятая со знаком «плюс», если точка M лежит на положительной полуоси, и со знаком «минус» в противном случае.

Прямоугольная система координат Oxy — это две взаимно перпендикулярные оси координат Ox и Oy с общим началом O. *Координаты* точки M — это координаты оснований перпендикуляров, проведённых из точки M к осям координат.

Задачи для самостоятельного решения

Вычисления в координатах

27.1. Найдите расстояние от точки с координатами $(x_0;\ y_0)$ до прямой, заданной уравнением $ax + by + c = 0$.

27.2. Докажите, что сумма квадратов расстояний от произвольной точки плоскости до двух противоположных вершин прямоугольника равна сумме квадратов расстояний от этой точки до двух других вершин прямоугольника.

27.3. Докажите, что площадь треугольника с вершинами в точках $(0;\ 0)$, $(x_1;\ y_1)$ и $(x_2;\ y_2)$ равна $\frac{1}{2}|x_1y_2 - x_2y_1|$.

27.4. Даны точки A и B и положительное число $k \neq 1$. Докажите, что множество, для любой точки M которого $AM = kBM$, представляет собой окружность (*окружность Аполлония*).

27.5. Даны точки A_1, ..., A_n, числа k_1, ..., k_n, сумма которых не равна нулю, и число c. Докажите, что множество, для любой точки X которого выполняется равенство

$$k_1(A_1X)^2 + \dots + k_n(A_nX)^2 = c,$$

является окружностью или пустым множеством.

27.6. Даны точки A_1, ..., A_n, числа k_1, ..., k_n, сумма которых равна нулю, и число c. Докажите, что множество, для любой точки X которого выполняется равенство

$$k_1(A_1X)^2 + \dots + k_n(A_nX)^2 = c,$$

является прямой, плоскостью или пустым множеством.

27.7. Координаты вершин треугольника рациональны. Докажите, что координаты центра описанной около него окружности также рациональны.

27.8. Диаметры AB и CD окружности S перпендикулярны. Хорда EA пересекает диаметр CD в точке K, хорда EC пересекает диаметр AB в точке L. Докажите, что если $CK : KD = 2 : 1$, то $AL : LB = 3 : 1$.

27.9. В треугольнике ABC угол C прямой. Докажите, что при гомотетии с центром C и коэффициентом 2 окружность, вписанная в треугольник, переходит в окружность, касающуюся окружности, описанной около треугольника.

Радикальная ось

Комментарий. В этом пункте метод координат используется только для решения задачи 27.12, но на этой задаче основано решение всех остальных задач.

27.10. Две окружности касаются друг друга в точке K, точка A лежит на общей касательной к окружностям, проходящей через точку K. Докажите, что отрезки касательных, проведённые из точки A к окружностям, равны.

27.11. Две окружности пересекаются в точках M и N, точка A лежит на прямой MN вне отрезка MN. Докажите, что отрезки касательных, проведённые из точки A к окружностям, равны.

Комментарий. Квадрат отрезка касательной, проведённой из точки X к окружности радиуса R с центром O, равен $OX^2 - R^2$. Из точки внутри окружности нельзя провести к ней касательную, но величину $OX^2 - R^2$ рассмотреть можно; для точки внутри окружности эта величина отрицательная. Для каждой точки плоскости величину $OX^2 - R^2$ называют *степенью* этой точки относительно окружности.

27.12. Центры двух окружностей не совпадают. Докажите, что множество всех точек, для которых степень относительно одной окружности равна степени относительно другой окружности, — это прямая, перпендикулярная прямой, соединяющей центры окружностей.

27.13. Две окружности касаются друг друга в точке K. Докажите, что общая касательная к окружностям, проходящая через точку K, — это множество всех точек, для которых степень относительно одной окружности равна степени относительно другой окружности.

27.14. Две окружности пересекаются в точках M и N. Докажите, что прямая MN — это множество всех точек, для которых степень относительно одной окружности равна степени относительно другой окружности.

27.15. К двум окружностям проведены два отрезка общих внешних касательных и два отрезка общих внутренних касательных. Докажите, что середины этих отрезков лежат на одной прямой.

27.16. Даны три окружности с попарно различными центрами, не лежащими на одной прямой. Докажите, что три радикальные оси пар этих окружностей пересекаются в одной точке.

Комментарий. Точку пересечения трёх радикальных осей для пар окружностей называют *радикальным центром* трёх окружностей.

27.17. Докажите, что три общие хорды трёх попарно пересекающихся окружностей или их продолжения пересекаются в одной точке или параллельны.

Векторы

Вектор — это направленный отрезок, т. е. отрезок, для которого указано, какой из его концов считается началом, а какой — концом. Вектор с началом A и концом B обозначают $\overrightarrow{AB}$. *Длина* вектора $\overrightarrow{AB}$ — это длина отрезка AB. Вектор, начало которого совпадает с концом, называют *нулевым* и обозначают $\vec{0}$. Длина нулевого вектора считается равной нулю.

Равенство векторов можно определить многими эквивалентными способами. Векторы $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{CD}$ называют равными, если середины отрезков AD и BC совпадают. Два вектора называют равными, если они совмещаются параллельным переносом. Два вектора называют равными, если они сонаправлены и их длины равны. Вектор можно также обозначать одной буквой: $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ и т. д.

Координатами вектора с началом $A(x_1;\ y_1)$ и концом $B(x_2;\ y_2)$ называют числа x_2-x_1 и y_2-y_1. Соответствующие координаты равных векторов равны, и, наоборот, векторы, у которых равны соответствующие координаты, равны.

Суммой вектора $\vec{a}$ с координатами x_1 и y_1 и вектора $\vec{b}$ с координатами x_2 и y_2 называют вектор с координатами x_1+x_2 и y_1+y_2; этот вектор обозначают $\vec{a}+\vec{b}$. Для любых трёх точек A, B и C имеет место векторное равенство $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{AC}$.

Произведение вектора $\vec{a}$ с координатами x_1 и y_1 на число k — это вектор с координатами kx_1 и ky_1; этот вектор обозначают $k\vec{a}$. Векторы $\vec{a}$ и $k\vec{a}$ называют *коллинеарными*. Нулевой вектор коллинеарен любому вектору.

Если $\vec{a}$ и $\vec{b}$ — неколлинеарные векторы, то любой вектор $\vec{c}$ можно представить в виде $\vec{c}=x\vec{a}+y\vec{b}$, где x и y — некоторые числа; эти числа определяются единственным образом.

Угол между неколлинеарными векторами $\overrightarrow{OA}$ и $\overrightarrow{OB}$ — это угол AOB.

Скалярное произведение двух ненулевых векторов — это произведение их длин на косинус угла между ними. Скалярное произведение вектора с координатами x_1 и y_1 и вектора с координатами x_2 и y_2 равно $x_1x_2 + y_1y_2$. Скалярное произведение векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ будем обозначать $\vec{a}\vec{b}$. Скалярный квадрат вектора $\vec{a}$ будем обозначать a^2.

Задачи для самостоятельного решения

Векторы и их применение

28.1. Даны точки $A(-3; 0)$, $B(1; 5)$, $C(4; 1)$ и $D(2; -2)$. Докажите, что прямые AC и BD взаимно перпендикулярны.

28.2. Докажите, что если диагонали четырёхугольника $ABCD$ взаимно перпендикулярны, то и диагонали любого четырёхугольника, стороны которого соответственно равны сторонам четырёхугольника $ABCD$, взаимно перпендикулярны.

28.3. Дано несколько точек и для некоторых пар (A, B) этих точек взяты векторы $\overrightarrow{AB}$, причём если данная точка является началом нескольких векторов, то она является концом такого же количества векторов. Докажите, что сумма всех взятых векторов равна $\vec{0}$.

28.4. На сторонах AB, BC, CD и DA квадрата $ABCD$ отмечены точки K, L, M и N соответственно так, что $AK + AN + CL + CM = 2a$, где a — длина стороны квадрата. Докажите, что отрезки KM и LN перпендикулярны.

28.5. Рассмотрим точку H, для которой выполняется равенство $\overrightarrow{OH} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC}$, где O — центр окружности, описанной около треугольника ABC. Докажите, что точка H — ортоцентр треугольника ABC.

28.6. Докажите, что для любых точек A, B, C и D выполняется неравенство $AB^2 + BC^2 + CD^2 + DA^2 \geqslant AC^2 + BD^2$.

28.7. На стене висят двое правильно идущих часов. Одни показывают московское время, другие — местное. Минимальное расстояние между концами их часовых стрелок равно m, а максимальное равно M. Найдите расстояние между центрами этих часов.

28.8. Внутри треугольника ABC отмечена точка O. Докажите, что $S_{BOC}\overrightarrow{OA} + S_{AOC}\overrightarrow{OB} + S_{AOB}\overrightarrow{OC} = \vec{0}$.

Комментарий. *Центром масс* системы точек $X_1, \ldots, X_n$ с сопоставленными им числами (массами) $m_1, \ldots, m_n$ называют точку O, для которой выполняется равенство

$$m_1\overrightarrow{OX_1} + \ldots + m_n\overrightarrow{OX_n} = \vec{0}.$$

Массы мы будем считать положительными. Центр масс можно точно так же определить и в том случае, когда некоторые массы отрицательные, но при этом сумма масс должна быть отлична от нуля.

28.9. Докажите, что центр масс существует и единствен для любой системы точек.

28.10. Докажите, что если X — произвольная точка, а точка O — центр масс точек $X_1, \ldots, X_n$ с массами $m_1, \ldots, m_n$, то

$$\overrightarrow{XO} = \frac{1}{m_1 + \ldots + m_n}\left(m_1\overrightarrow{XX_1} + \ldots + m_n\overrightarrow{XX_n}\right).$$

28.11. Докажите, что центр масс системы точек останется прежним, если часть точек заменить одной точкой, которая расположена в их центре масс и которой составлена масса, равная сумме их масс.

28.12. Докажите, что центр масс O точек A и B с массами a и b лежит на отрезке AB и $AO : OB = b : a$.

28.13. Докажите, что центр масс вершин A, B и C треугольника ABC с единичными массами — точка пересечения его медиан.

28.14. Пусть $ABCD$ — выпуклый четырёхугольник, точки K, L, M и N — середины сторон AB, BC, CD и DA. Докажите, что точка пересечения отрезков KM и LN является общей серединой этих отрезков и серединой отрезка, соединяющего середины диагоналей.

28.15. Решите задачу 22.34 с помощью центра масс.

28.16. На сторонах AB, BC, CD и DA выпуклого четырёхугольника $ABCD$ взяты точки K, L, M и N соответственно, причём $AK : KB = DM : MC = a$ и $BL : LC = AN : ND = b$. Пусть P — точка пересечения отрезков KM и LN. Докажите, что $NP : PL = a$ и $KP : PM = b$.

28.17. Докажите, что если многоугольник имеет несколько осей симметрии, то все они пересекаются в одной точке.

Правильные многоугольники

Выпуклый многоугольник называют *правильным*, если равны все его стороны и равны все его углы.

Около правильного многоугольника можно описать окружность и в правильный многоугольник можно вписать окружность. Центры этих окружностей совпадают; общий центр этих окружностей называют *центром* правильного многоугольника.

Задачи для самостоятельного решения

29.1. Найдите сумму квадратов расстояний от произвольной точки окружности радиуса R до вершин вписанного в эту окружность правильного $2n$-угольника.

29.2. Докажите, что все углы между сторонами и диагоналями правильного n-угольника имеют вид $m\alpha$, где m — целое число и

$$\alpha = \frac{180°}{n}.$$

29.3. Окружность разделена на равные дуги n диаметрами. Докажите, что основания перпендикуляров, опущенных из произвольной точки M, лежащей внутри окружности, на эти диаметры, являются вершинами правильного многоугольника.

29.4. Сторона правильного пятиугольника равна a, его диагональ равна b. Докажите, что

$$b^2 = a^2 + ab.$$

29.5. Докажите, что диагонали A_1A_5, A_2A_6, A_3A_8 и A_4A_{11} правильного двенадцатиугольника $A_1...A_{12}$ пересекаются в одной точке.

29.6. Точка O — центр правильного многоугольника $A_1...A_n$. Докажите, что

$$\overrightarrow{OA_1} + \ldots + \overrightarrow{OA_n} = \vec{0}.$$

29.7. Докажите, что сумма квадратов расстояний от точки на окружности радиуса R, описанной около правильного n-угольника, до его вершин равна $2nR^2$.

29.8. Сторона правильного семиугольника равна a, короткая и длинная диагонали равны b и c. Докажите, что $ab + ac = bc$.

Длина окружности и площадь круга

Длина окружности — это предел, к которому стремится периметр правильного n-угольника, вписанного в окружность, при неограниченном увеличении числа сторон n.

Отношение длины окружности к её диаметру — одно и то же число π для всех окружностей.

Площадь круга — это предел, к которому стремится площадь правильного n-угольника, вписанного в окружность, при неограниченном увеличении числа сторон n.

Площадь круга радиуса R равна πR^2.

Сектор — это часть круга, ограниченная дугой окружности и двумя радиусами, соединяющими центр круга с концами дуги.

Площадь сектора радиуса R, ограниченного дугой с градусной мерой α, равна $\frac{\pi R^2}{360}\alpha$.

Сегмент — это часть круга, ограниченная дугой окружности и хордой.

Если дуга, ограничивающая сегмент, меньше 180°, то площадь сегмента равна разности площади сектора и площади треугольника, сторонами которого являются хорда и два радиуса, ограничивающие сектор.

Если дуга, ограничивающая сегмент, больше 180°, то площадь сегмента равна сумме площади сектора и площади треугольника, сторонами которого являются хорда и два радиуса, ограничивающие сектор.

Задачи для самостоятельного решения

30.1. Острый угол ромба равен α. Найдите отношение площади вписанного в ромб круга к площади ромба.

30.2. Прямая делит длину дуги окружности в отношении $1:3$. В каком отношении она делит площадь круга?

30.3. В правильный многоугольник со стороной a вписана окружность, и около него описана окружность. Найдите площадь кольца, ограниченного этими окружностями.

30.4. На гипотенузе и катетах прямоугольного треугольника построены полукруги (рис. 89). Докажите, что сумма площадей двух образовавшихся «луночек» равна площади данного треугольника.

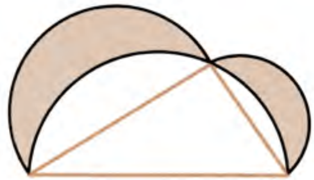


Рис. 89

30.5. В круге проведены два перпендикулярных диаметра, т. е. четыре радиуса, а затем построены четыре круга, диаметрами которых служат эти радиусы. Докажите, что суммарная площадь попарно общих частей этих кругов равна площади части исходного круга, лежащей вне рассматриваемых четырёх кругов (рис. 90).

30.6. На отрезке AB отмечена точка C и по одну сторону от этого отрезка построены полуокружности с диаметрами AB, AC и CB. Найдите отношение площади фигуры, ограниченной дугами этих полуокружностей, к площади треугольника с вершинами в серединах полуокружностей.

30.7. На отрезке AB отмечена точка C, и по одну сторону от этого отрезка построена полуокружность с диаметром AB, а по другую — полуокружности с диаметрами AC и CB. Найдите отношение площади фигуры, ограниченной дугами этих полуокружностей, к площади треугольника с вершинами в серединах полуокружностей.

30.8. В окружности с центром O проведены перпендикулярные диаметры AB и CD, на дуге BC отмечена точка P. Отрезки DC и DP пересекают окружность радиуса DB с центром D в точках E и F (рис. 91). Докажите, что площадь сектора, ограниченного радиусами OC и OP, равна площади сектора, ограниченного радиусами DE и DF.

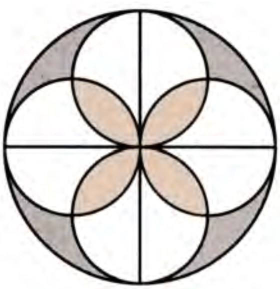


Рис. 90

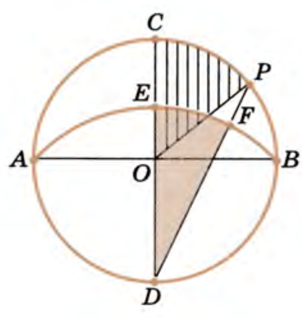


Рис. 91

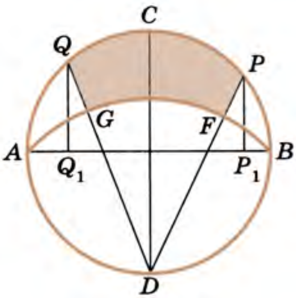


Рис. 92

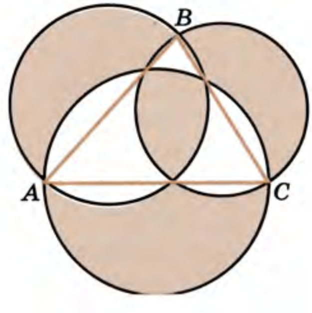


Рис. 93

30.9. В окружности проведены перпендикулярные диаметры AB и CD, на дуге ACB отмечены точки P и Q. Отрезки DP и DQ пересекают окружность радиуса DB с центром D в точках F и G. Докажите, что площадь криволинейного четырёхугольника $PQGF$, ограниченного дугами окружностей и лучами DP и DQ, равна площади треугольника DP_1Q_1, где P_1 и Q_1 — проекции точек P и Q на прямую AB (рис. 92).

30.10. На трёх отрезках OA, OB и OC одинаковой длины (точка B лежит внутри угла AOC) как на диаметрах построены окружности. Докажите, что площадь криволинейного треугольника, ограниченного дугами этих окружностей и не содержащего точку O, равна половине площади (обычного) треугольника ABC.

30.11. На сторонах произвольного остроугольного треугольника ABC как на диаметрах построены окружности. При этом образуются три внешних криволинейных треугольника и один внутренний (рис. 93). Докажите, что сумма площадей внешних криволинейных треугольников равна сумме площади внутреннего криволинейного треугольника и удвоенной площади треугольника ABC.

Ответы

1.1. Одну, четыре или шесть. **1.2.** Одну, пять, шесть, восемь или десять. **1.3.** 1 или 3. **1.4.** 1, 4 или 6. **1.5.** 1, 5, 6, 8 или 10. **1.6.** В 15 точках. **1.7.** В $\frac{n(n-1)}{2}$ точках. **1.8.** 6. **1.9.** $\frac{n(n-1)}{2}$. **1.10.** б) Нет. **1.11.** б) Нет. **1.12.** Да. Нет. **1.13.** Да. **1.14.** На 8, 10 или 11. **1.15.** На 10, 13, 14, 15 или 16. **2.1.** 4 или 2. **2.3.** Нет. **2.4.** Да. **2.5.** Нет. **2.6.** Рядом с домом, расположенным между двух домов. **2.8.** Нет. **2.12.** 70°. **2.13.** 110°. **2.14.** $\frac{\alpha+\beta}{2}$ или $\frac{|\alpha-\beta|}{2}$. **2.15.** а) Острый; б) тупой. **2.16.** 15° или 165°. **2.17.** 44 раза. **2.23.** Можно. **2.24.** Нет. **3.1.** 90°. **3.2.** 60°. **5.9.** 90°. **5.10.** Да. **5.11.** Да. **5.12.** Да. **5.13.** Да. **6.7.** $\angle A = 60°$, $\angle B = 90°$, $\angle C = 30°$. **6.10.** 1 : 3. **6.11.** 90°, 60° и 30°. **6.15.** 90°. **6.24.** 1. **6.27.** 15°, 15° и 150°. **6.28.** 75°, 75° и 30°. **6.32.** 30°. **6.34.** 90°. **6.35.** 45°. **6.36.** 45°. **6.37.** 90°. **6.38.** 90°. **7.1.** 45°. **7.2.** 90°. **7.4.** 60°. **7.10.** 35°. **7.12.** 60°. **7.15.** 60°. **7.16.** а) 90°; б) 60°. **7.17.** $\frac{180°}{7}$. **7.18.** 20°. **7.19.** а) 90°, 45°, 45°. б) 108°, 36°, 36°. в) 72°, 72°, 36°. г) $\frac{540°}{7}$, $\frac{540°}{7}$, $\frac{180°}{7}$. **7.24.** 70°. **7.25.** 80°. **7.26.** Нет, не может. **7.28.** 22. **7.29.** $2n+1$. **8.3.** Не может. **8.4.** 60°. **8.7.** $\frac{\angle C - \angle A}{2} + 90°$. **8.12.** $\angle A = \angle B = 45°$, $\angle C = 90°$. **8.18.** 60°. **8.19.** 30°. **8.24.** 110°. **8.25.** 150°. **9.6.** 3. **9.7.** 2. **9.11.** Расстояние до каждой из двух хорд равно 2. **9.16.** 3. **9.17.** 45° и 45°. **9.21.** На 3 или на 4. **9.22.** На 4, 5, 6 или 7. **9.23.** Наибольшее число частей равно 11, наименьшее — 5. **9.24** На 8 частей. **9.25** На 14 частей. **11.1.** Да. **11.2.** Да. **11.3.** Да. **11.4.** Да. **11.5.** Да. **11.14.** Нет. **11.15.** Да. **12.1.** 60° и 120°. **12.3.** а) Нет. б) Да. **12.11.** Нет. **12.13.** Биссектриса угла A делит сторону CD пополам. **12.21.** 36°, 108° и 36°. **12.22.** 72°, 72°, 108° и 108°. **12.23.** Да. **13.1.** $\frac{1}{4}$. **13.4.** 36°. **13.6.** 30°. **13.8.** Параллелограмм является прямоугольником, когда диагонали исходного четырёхугольника перпендикулярны; ромбом, когда диагонали равны; квадратом, когда диагонали равны и перпендикулярны. **13.23.** 12. **13.28.** $p : q$. **13.29.** $p : (p+q)$. **13.31.** $q : p$. **14.18.** $90° + \alpha$ и $180° - 2\alpha$. **14.19.** $90° - 2\alpha$. **15.3.** Нет. **15.25.** а) Точка B — дальний от A конец диаметра, продолжение которого проходит через точку A; б) точка B — ближний к A конец диаметра, продолжение которого проходит через точку A. **15.26.** а) Точка B — дальний от A конец диаметра, проходящего через точку A; б) точка B — ближний к A конец диаметра, проходящего через точку A. **15.28.** $\angle ABM < \angle CBM$. **15.37.** Да, может. **16.1.** $BH = \frac{a^2 + c^2 - b^2}{2a}$. **16.2.** $BH = \frac{b^2 - c^2 - a^2}{2a}$. **16.3.** $AH^2 = \frac{\left(2a^2b^2 + b^2c^2 + a^2c^2\right) - a^4 - b^4 - c^4}{4a^2}$. **16.7.** $\sqrt{2}d$. **16.8.** $\sqrt{2}d$. **17.4.** $\frac{p}{q}\left(1 + \frac{n}{m}\right)$. **17.11.** 2 : 3. **17.12.** $\frac{qa + pb}{p + q}$. **17.18.** $\sqrt{ab}$. **17.27.** Да. **17.36.** $(b + c) : a$. **17.37.** $\frac{bc}{b + c}$. **18.1.** Нет. **18.10.** 60° или 120°. **18.16.** Точка D — основание высоты, проведённой из вершины A. **18.25.** 6. **18.32.** $\frac{1}{7}$. **19.3.** 4. **19.14.** 50. **19.15.** В 7 раз. **19.16.** б) $\frac{5 + \sqrt{5}}{2}S$. **19.20.** Площадь треугольника AKF больше площади четырёхугольника $KECF$. **19.22.** Да. **19.23.** Да. **19.24.** Да. **19.25.** $\frac{1}{4}\sqrt{2\left(a^2b^2 + b^2c^2 + a^2c^2\right) - a^4 - b^4 - c^4} = \sqrt{p(p - a)(p - b)(p - c)}$, где $p = \frac{a + b + c}{2}$. **19.26.** 24. **19.27.** Нет. **19.28.** $\frac{ab}{2}$. **19.30.** $\frac{ab}{2}$. **20.4.** $\sqrt{d^2 - (R - r)^2}$. **20.5.** $\sqrt{d^2 - (R + r)^2}$. **20.6.** 90°. **20.17.** $\sqrt{ab}$. **20.19.** $\frac{a + b - 2\sqrt{ab}\cos\alpha}{2\sin\alpha}$. **20.21.** $2(a + b + c)$. **20.22.** $2R$. **20.26.** 90°. **21.1.** $\frac{1}{2}|AE - BE|$. **21.7.** $\frac{2}{3}$. **21.16.** 22,5°, 67,5°, 90°. **21.19.** Нет, не верно. **21.22.** 1. **21.35.** 36°, 36°, 108°. **21.43.** 10. **22.2.** $\frac{S}{2}$. **22.3.** $S_1 + S_2 + 2\sqrt{S_1S_2}$ и $2\sqrt{S_1S_2}$. **22.4.** $\left(\sqrt{S_1} + \sqrt{S_2} + \sqrt{S_3}\right)^2$. **22.5.** $\frac{3S}{4}$. **22.8.** 45°. **22.14.** 45° или 135°. **22.21.** $180° - 2\angle A$, $180° - 2\angle B$ и $180° - 2\angle C$. **22.22.** $2\angle A$, $2\angle B$ и $2\angle C - 180°$. **22.23.** $90° - \frac{\alpha}{2}$, $90° - \frac{\beta}{2}$ и $90° - \frac{\gamma}{2}$; $90° + \frac{\alpha}{2}$, $\frac{\beta}{2}$ и $\frac{\gamma}{2}$; $\frac{\alpha}{2}$, $90° + \frac{\beta}{2}$ и $\frac{\gamma}{2}$; $\frac{\alpha}{2}$, $\frac{\beta}{2}$ и $90° + \frac{\gamma}{2}$. **23.1.** Не может. **23.2.** а) 3; б) 12. **23.3.** а) 12; б) 60. **23.10.** Нет.

23.11. Нет. **23.14.** Прямоугольники и только они. **23.15.** Из любого. **23.20.** Нет. **23.24.** Точка пересечения диагоналей. **23.30.** Да. **23.31.** Да. **23.33.** 60°. **23.35.** $\frac{5+\sqrt{5}}{2}$. **23.36.** Нельзя. **23.37.** Да, существуют. **23.38.** $\frac{ac}{b}$. **23.40.** Да, существует. **23.41.** а) Да; б) нет. **23.45.** 360°. **23.46.** 3. **24.4.** Нет. **24.9.** 30°, 60°, 90°. **24.11.** 45°. **24.16.** Две. Прямая, содержащая отрезок, и серединный перпендикуляр к отрезку. **24.18.** Нет. **24.21.** Ни одной, одну, две или четыре. **24.30.** 45°. **24.31.** 135°. **24.38.** Да, зависит. **24.40.** Да, зависит. **24.45.** Нет. **24.47.** Да, зависит. Для перпендикулярных прямых результат не зависит от порядка. **25.2.** По прямой, параллельной прямой l и делящей перпендикуляр, проведённый к прямой l из середины M стороны AB, в отношении $1:2$, считая от точки M. **25.9.** 6. **25.10.** Окружность, полученная из данной окружности при гомотетии с коэффициентом $\frac{1}{3}$ и центром в середине стороны AB, без двух точек, соответствующих точкам A и B. **25.11.** $a\sqrt{1+\frac{r}{R}}$. **25.12.** $a\sqrt{1-\frac{r}{R}}$. **25.20.** $\sqrt{ab}$. **27.1.** $\frac{|ax_0+by_0+c|}{\sqrt{a^2+b^2}}$. **28.7.** $\frac{m+M}{2}$. **29.1.** $4nR^2$. **30.1.** $\frac{\pi\sin\alpha}{4}$. **30.2.** $\frac{\pi-2}{3\pi+2}$. **30.3.** $\frac{\pi\alpha^2}{4}$. **30.6.** π. **30.7.** π.

Глава 1. Прямая и отрезок, луч и угол

1.1. Возможны следующие случаи (рис. 94): 1) все четыре прямые проходят через одну точку; 2) три прямые проходят через одну точку, а четвёртая прямая пересекает их в трёх других точках; 3) никакие три прямые не проходят через одну точку. **1.2.** Возможны следующие случаи (рис. 95): 1) все пять прямых проходят через одну точку; 2) четыре прямые проходят через одну точку, а пятая прямая не проходит через эту точку; 3) три прямые проходят через одну точку, а две оставшиеся прямые через эту точку не проходят, но точка пересечения этих двух прямых лежит на одной из трёх первых прямых; 4) три прямые проходят через одну точку, а две оставшиеся прямые через эту точку не проходят, причём точка пересечения этих двух прямых не лежит ни на одной из трёх первых прямых; 5) никакие три прямые не проходят через одну точку. **1.3.** Возможны два случая: 1) точки лежат на одной прямой; 2) точки не лежат на одной прямой. **1.4.** Возможны следующие слу-

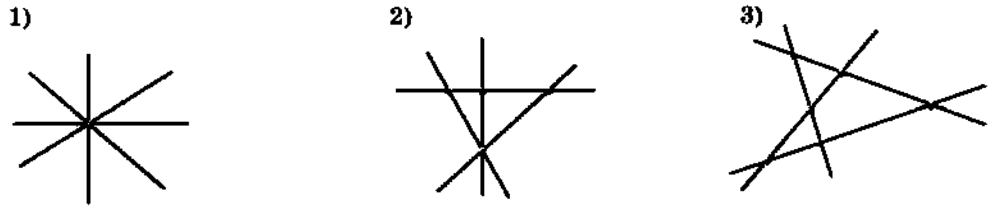


Рис. 94

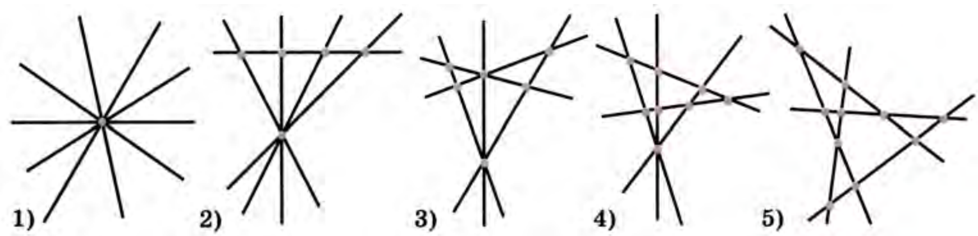


Рис. 95

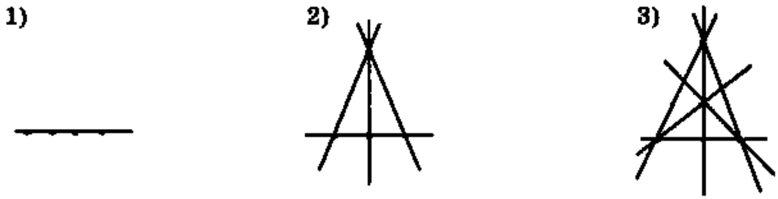


Рис. 96

чаи (рис. 96): 1) точки лежат на одной прямой; 2) три точки лежат на одной прямой, а четвёртая точка не лежит на этой прямой; 3) никакие три из данных точек не лежат на одной прямой. **1.5.** Возможны следующие случаи (рис. 97): 1) все пять точек лежат на одной прямой; 2) четыре точки лежат на одной прямой, а пятая не лежит на этой прямой; 3) три точки лежат на одной прямой, а две оставшиеся точки не лежат на одной прямой, но содержащая их прямая проходит через одну из трёх первых точек; 4) три точки лежат на одной прямой, а две оставшиеся точки не лежат на одной прямой, причём содержащая их прямая не проходит ни через одну из трёх первых точек; 5) никакие три точки не лежат на одной прямой.

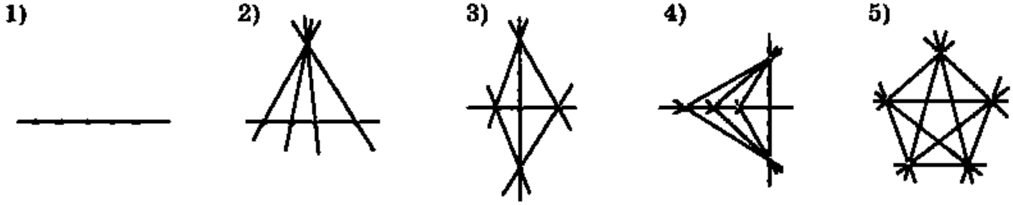


Рис. 97

1.6. Из шести прямых можно составить 15 пар. **1.7.** Первую прямую можно выбрать n способами, после этого вторую прямую можно выбрать $n-1$ способом. При этом каждую точку пересечения прямых мы посчитаем дважды. **1.8.** Из четырёх точек можно составить 6 пар. **1.9.** Один конец отрезка можно выбрать n способами, после этого другой конец отрезка можно выбрать $n-1$ способом. При этом каждый отрезок мы посчитаем дважды. **1.10.** а) Точки A и D лежат на прямой BC. б) Точки B и C могут совпадать и не лежать на прямой AD (рис. 98). **1.11.** а) Прямые a и d проходят через точку пересечения прямых b и c. б) Прямые b и c могут совпадать и не проходить через точку пересечения прямых a и d

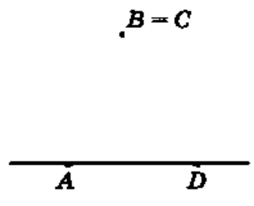


Рис. 98

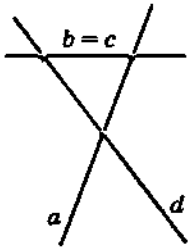


Рис. 99

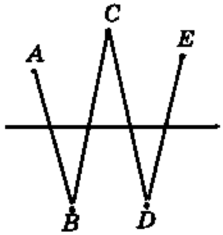


Рис. 100

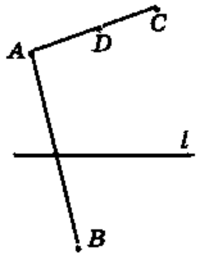


Рис. 101

(рис. 99). **1.12.** Точки A, C и E лежат по одну сторону от данной прямой, а точки B и D — по другую (рис. 100). **1.13.** Точка B и отрезок AC лежат по разные стороны от прямой l (рис. 101). **1.14.** См. указание к задаче 1.1. **1.15.** См. указание к задаче 1.2.

Глава 2. Сравнение и измерение отрезков и углов

2.1. Возможны два случая: 1) точка C лежит на отрезке AB; 2) точка C не лежит на отрезке AB. **2.2.** Если точки B и C лежат по одну сторону от точки A, то $MN = \frac{|AB - AC|}{2} = \frac{BC}{2}$. Если точки B и C лежат по разные стороны от точки A, то $MN = \frac{AB + AC}{2} = \frac{BC}{2}$.

2.3. Середины двух отрезков с общим концом не могут совпадать. **2.4.** На отрезке AD отметьте точки B и C так, что $AB = CD$. **2.5.** Если середины трёх отрезков совпадают, то по обе стороны от общей середины лежат по три конца отрезков. **2.6.** Пусть дома A и B расположены с края, дом C расположен между ними. Для любой точки X отрезка AB сумма расстояний от точки X до точек A и B равна $AX + XB = AB$. Поэтому наименьшим должно быть расстояние от точки X до точки C. **2.7.** Сложите 8 равенств $A_1A_2 + A_2A_{10} = A_1A_{10}$, ..., $A_1A_9 + A_9A_{10} = A_1A_{10}$. **2.8.** Для точки X, лежащей вне отрезка AB, выполняется равенство $XA - XB = \pm d$, где d — длина отрезка AB. Сумма нечётного количества чисел $\pm d$ не может быть равной нулю. **2.9.** 7 см = 2 · 8 см − 3 · 3 см. **2.10.** а) 11 см − 7 см = 4 см, 4 см + 4 см = 8 см. б) 8 см − 7 см = 1 см. **2.11.** а) 4 · 17 см − 5 · 13 см = 3 см. б) 4 · 13 см − 3 · 17 см = 1 см. в) Можно воспользоваться тем, что 9 см = 3 · 3 см, или тем, что 9 см = 9 · 1 см. **2.12.** Из условия задачи следует, что луч OC расположен внутри угла AOB (рис. 102).

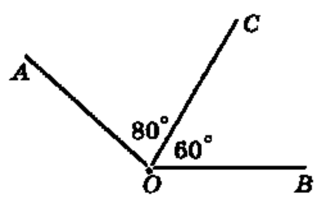


Рис. 102

2.13. Из условия задачи следует, что луч OC расположен вне угла AOB (рис. 103). **2.14.** Лучи OA и OB лежат либо по одну сторону от прямой OC, либо по разные стороны. **2.15.** В 3 ч стрелки часов образуют прямой угол. Минутная стрелка движется быстрее часовой. **2.16.** За час минутная стрелка возвращается в исходное положение, а часовая поворачивается на 30°. В начальный момент угол между стрелками может либо увеличиваться, либо уменьшаться. **2.17.** За 12 часов минутная стрелка совершает 12 оборотов, а часовая — один оборот, поэтому минутная стрелка обгоняет часовую 11 раз. Следовательно, моменты совпадения стрелок разбивают время от полуночи до полудня (и от полудня до полуночи) на 11 равных отрезков. На каждом таком отрезке стрелки два раза перпендикулярны (когда минутная стрелка впереди и когда позади часовой на 90°). **2.18.** $20° = 180° - 4 \cdot 40°$. **2.19.** $40° = 180° - 2 \cdot 70°$. **2.20.** $1° = 19 \cdot 19° - 360°$. **2.21.** На отрезке длиной 12 нужно последовательно отложить отрезки длиной 2, 3 и 7. **2.22.** На отрезке длиной 12 нужно последовательно отложить отрезки длиной 3, 2 и 7. **2.23.** Пример требуемого расположения лучей приведён на рисунке 104. **2.24.** Если отрезок длиной $a + b + c$ разделён последовательно на отрезки длиной a, b и c, то сумма попарных расстояний равна $3(a + b + c) + b$. В рассматриваемом случае сумма попарных расстояний равна 37 и $a + b + c = 12$.

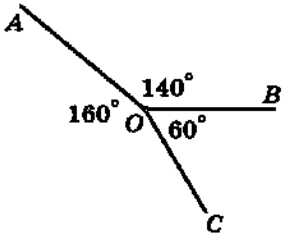


Рис. 103

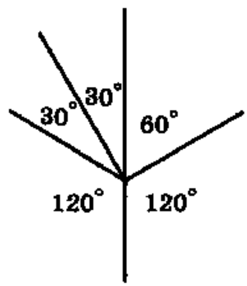


Рис. 104

Глава 3. Перпендикулярные прямые, смежные и вертикальные углы

3.1. Если смежные углы равны 2α и 2β, то угол между их биссектрисами равен $\alpha + \beta$. **3.2.** Сумма отмеченных углов и соответствующих им вертикальных углов равна 360°. **3.3.** Пусть каждый из вертикальных углов равен 2α, а каждый из смежных с ними углов равен 2β. Тогда угол между биссектрисами этих вертикальных углов равен $\alpha + 2\beta + \alpha = 180°$. **3.4.** Биссектрисы смежных углов перпендикулярны.

Глава 4. Равнобедренный треугольник

4.1. Пусть $\angle A = 2\alpha$. Тогда $\angle OAC = \alpha = \angle OCA$. **4.2.** Пусть точка M — середина основания AC равнобедренного треугольника ABC.

Тогда отрезок BM — медиана равнобедренного треугольника, поэтому $BM \perp AC$. Таким образом, точка B лежит на прямой, проходящей через точку M перпендикулярно прямой AC. **4.3.** Пусть точка O — середина отрезка AC. Тогда $AC \perp BO$ и $AC \perp OD$. **4.4.** Треугольник AMB равнобедренный, поэтому $\angle B = \angle BAM$. Аналогично $\angle C = \angle CAM$. Поэтому $\angle A = \angle BAM + \angle CAM = \angle B + \angle C$.

Глава 5. Признаки равенства треугольников

5.1. Докажите сначала, что треугольники OBA и OBC равны по стороне и прилежащим к ней углам. **5.2.** Докажите, что $\triangle AMD = \triangle CME$ и $\triangle ACE = \triangle CAD$. **5.3.** В треугольниках ABN и CBM равны стороны BN и BM и прилегающие к ним углы. **5.4.** Сначала докажите равенство углов BKC и BAL (рис. 105), а затем равенство треугольников ABL и KBC. **5.5.** Пусть F и G — точки пересечения отрезка CE с отрезками DB и DA (рис. 106). Сначала докажите, что $\triangle ACG = \triangle BEF$ (по стороне и прилежащим к ней углам), а затем докажите, что $DF = DG$. **5.6.** Треугольники ABD и ABE равны. Если точка C лежит на луче AB, то $\angle CAD = \angle BAD = \angle BAE = \angle CAE$. Если точка C лежит на продолжении луча AB, то $\angle CAD = 180° - \angle BAD = 180° - \angle BAE = \angle CAE$. В обоих случаях $\angle CAD = \angle CAE$, поэтому $\triangle CAD = \triangle CAE$. **5.7.** Сначала докажите равенство треугольников ABO и OCM (по двум сторонам и углу между ними, рис. 107), а затем воспользуйтесь равенством углов AOK и MOC. **5.8.** Пусть точка M — середина отрезка BC (рис. 108). Тогда $\triangle LBK = \triangle MBK$ (по двум сторонам и углу между ними) и $\triangle KMC = \triangle ALB$ (по двум сторонам и углу между

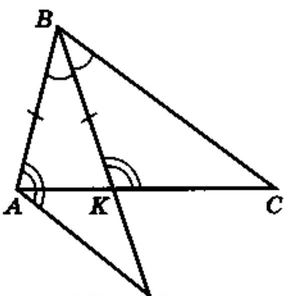


Рис. 105

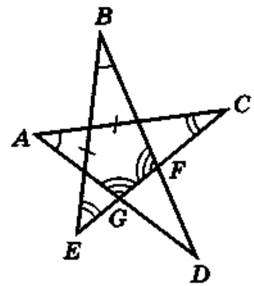


Рис. 106

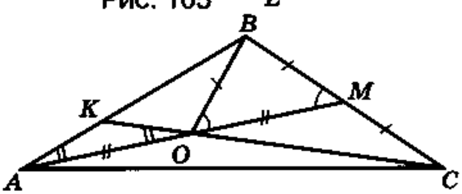


Рис .107

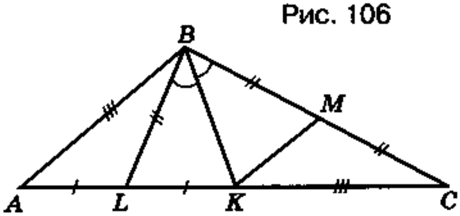


Рис. 108

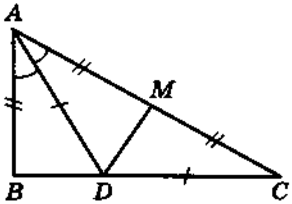


Рис. 109

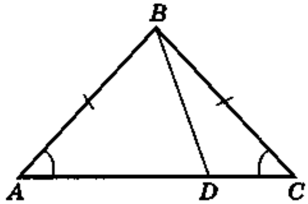


Рис. 110

ними). 5.9. Пусть M — середина стороны AC (рис. 109). Треугольники ABD и AMD равны (по двум сторонам и углу между ними). Поэтому $\angle ABD = \angle AMD = 90°$. **5.10.** Возьмите равнобедренный треугольник ABC, отметьте точку D на его основании AC (или на продолжении основания) и рассмотрите треугольники ABD и CBD (рис. 110). **5.11.** Возьмите равнобедренный треугольник ABC, отметьте точку D на его основании AC и рассмотрите треугольники ABD и CBD (см. рис. 110). **5.12.** Возьмите равнобедренный треугольник ABC с основанием AC, отметьте точку D на стороне BC так, что $AD = AC$, и рассмотрите треугольники ABC и CAD (рис. 111). **5.13.** Проведите высоты AN_1 и CM_1 и отметьте точку M на отрезке BM_1 и точку N на отрезке CN_1 так, что $MM_1 = NN_1$ (рис. 112).

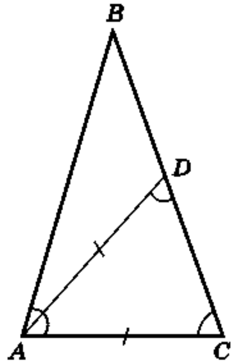


Рис. 111

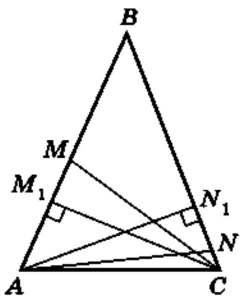


Рис. 112

Глава 6. Прямоугольные треугольники

6.1. Прямоугольные треугольники, которые отрезают данные медианы, равны по гипотенузе и катету. **6.2.** Из равенства противолежащих катетам острых углов следует равенство прилежащих к ним углов. **6.3.** Пусть высоты AH и CK треугольника ABC равны. Тогда прямоугольные треугольники ABH и CBK равны по катету и противолежащему острому углу. **6.4.** В треугольнике CDK углы при вершинах D и K равны $90° - \frac{1}{2}\angle A$. **6.5.** В треугольнике CBD углы при вершинах C и D равны $90° - \frac{1}{2}\angle B$. **6.6.** Пусть $\angle A = 2\alpha$ и $\angle B = 2\beta$, O — точка пересечения биссектрис углов BAC и BCH. Тогда в треугольнике AOC углы при вершинах A и C равны α и $2\beta + \alpha$. **6.7.** Пусть M — середина стороны AC (рис. 113). Треугольники ABD и AMD равны по двум сторонам и углу между ними. Поэтому $\angle ABD = \angle AMD = 90°$. Пусть $\angle ADM = \alpha$. Тогда $3\alpha = \angle BDA + \angle ADM + \angle MDC = 180°$, поэтому $\alpha = 60°$. Следовательно, $\angle C = 30°$ и $\angle A = 2\angle C = 60°$. **6.8.** Пусть точка M — середина стороны BC (рис. 114). Тогда $\angle AMB = 90° + \frac{1}{2}\angle C = \angle ACE$, поэтому треугольники AMB и ACE равны (по стороне и двум прилежащим к ней углам). **6.9.** В прямоугольном треугольнике AHB катет AH лежит против угла 30°, поэтому он вдвое меньше гипотенузы AB. **6.10.** Сначала докажите, что $B_1C = BC = 2AC_1$ и $\angle ABC_1 = 30°$. Затем докажите, что $CK = CK_1 = 2DK$. **6.11.** Пусть медиана CM и высота CH делят угол ACB треугольника ABC на три равные части. Для определённости можно считать, что точка H расположена между точками M и B. Проведите из точки M перпендикуляр MK к стороне AC (рис. 115). Тогда $AM = 2MH = 2KM$, поэтому $\angle A = 30°$ и $\angle ACH = 90° - \angle A = 60°$. **6.12.** Если $\angle ACM = \angle CAM = \alpha$, то $\angle BCM = \angle CBM = 90° - \alpha$. Поэтому $AM = CM = MB$. **6.13.** Пусть CM и CH — медиана и высота треугольника ABC с прямым углом C. Тогда $\angle ACM = \angle A = \angle BCH$. Для определённости можно считать, что точка H лежит на отрезке MB (рис. 116). **6.14.** Пусть точка M — середина гипотенузы AB (рис. 117).

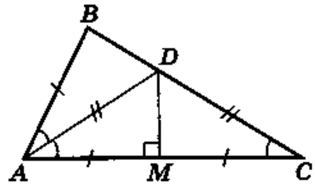


Рис. 113

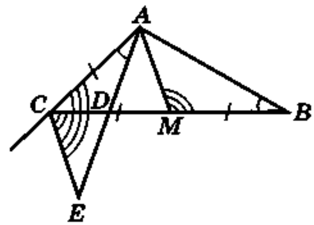


Рис. 114

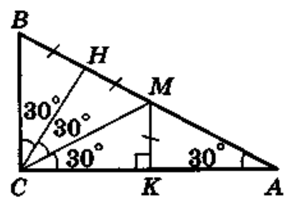


Рис. 115

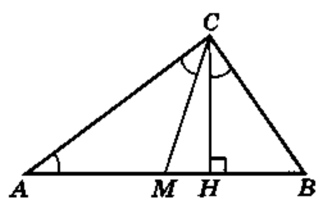


Рис. 116

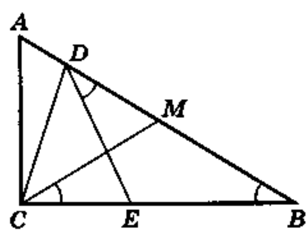


Рис. 117

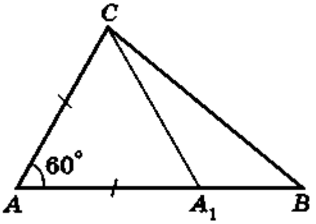


Рис. 118

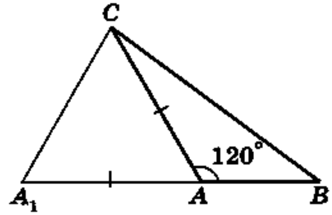


Рис. 119

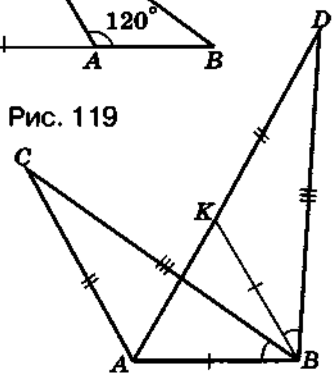


Рис. 120

Тогда треугольники DMC и CED равны по общей стороне CD и прилежащим к ней углам. Поэтому $AD + CE = AD + DM = AM = CM = DE$. 6.15. Пусть точка M — середина стороны AB. Тогда треугольник AMC равносторонний, а треугольник BMC равнобедренный. Поэтому $\angle ACM = 60°$ и $\angle BCM = 30°$. 6.16. В треугольнике APR сторона AP вдвое больше стороны AR и $\angle A = 60°$, поэтому $\angle ARP = 90°$ (см. задачу 6.15). 6.17. На стороне AB отметьте точку A_1 так, что $AA_1 = AC$ (рис. 118). 6.18. На продолжении стороны AB за точку A отметьте точку A_1 так, что $AA_1 = AC$ (рис. 119). 6.19. Треугольники ACD и BCE равны по двум сторонам и углу между ними. 6.20. Отметьте на отрезке AD точку K так, что $AK = AB$, и докажите, что треугольник ABK равносторонний. Затем докажите равенство треугольников ABC и KBD (рис. 120). 6.21. Отметьте на стороне AC точку T так, что $AT = AY$ (рис. 121). Тогда треугольники ATY и CTZ равносторонние, TY — биссектриса и медиана треугольника XTZ, поэтому $TY \perp YZ$. Следовательно, $\angle TZY = 30°$ и $\angle YZC = 90°$. 6.22. Пусть K — точка пересечения прямых BC и MH (рис. 122). Тогда $\triangle KBM = \triangle DAM$. Поэтому HB — медиана прямоугольного треугольника KHC. 6.23. Отметьте точку E

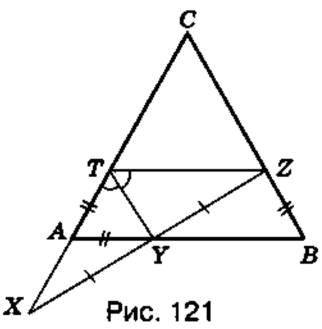


Рис. 121

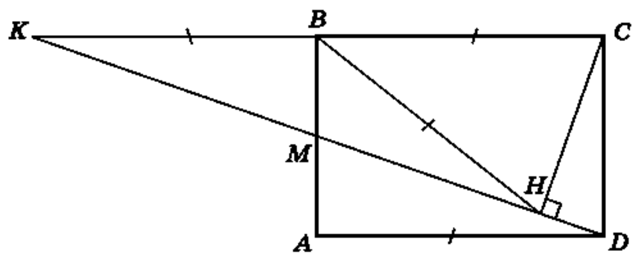


Рис. 122

на продолжении стороны BC за точку B так, что $BE = AK$ (рис. 123). Тогда треугольники ABC и EKC равны по двум сторонам и углу между ними. Из равенства $CM = MK$ следует, что KM — медиана прямоугольного треугольника EKC и $AK + BM = EB + BM = EM = CM$. **6.24.** Отложите на продолжении стороны AB за точку B отрезок BG, равный AB (рис. 124). Прямоугольные треугольники ECD и EBG равны по двум катетам, поэтому точки G, E и D лежат на одной прямой. Отрезок FB — медиана прямоугольного треугольника AFG, проведённая к гипотенузе. **6.25.** Треугольники ADE и CDG равны по двум сторонам и углу между ними. **6.26.** Пусть O — общая вершина трёх квадратов. Тогда треугольники AOB и COD равны по двум сторонам и углу между ними. **6.27.** Треугольник DAE равнобедренный ($AD = AE$), и его угол при вершине A равен 30°, поэтому углы при его основании равны 75°. **6.28.** Треугольник DAE равнобедренный ($AD = AE$), и его угол при вершине A равен 150°, поэтому углы при его основании равны 15°. **6.29.** Воспользовавшись результатами задач 6.27 и 6.28, покажите, что $\angle EDC = 15° = \angle FDC$. **6.30.** Из треугольников ABE и ADF можно сложить треугольник, равный треугольнику AEF по двум сторонам и углу между ними (рис. 125). **6.31.** Обозначьте вершины квадрата и концы отложенных отрезков так, как показано на рисунке 126. Пусть $\angle CML = \alpha$. Тогда $\angle DKL = 90° - \alpha$ и $\angle MKP = 180° - (90° - \alpha) - 45° - 45° = \alpha$. **6.32.** Воспользуйтесь тем, что треугольник BDE равносторонний. **6.33.** Отложите на луче PB отрезок PN, равный PC. Пусть $\angle PCD = 2\alpha$.

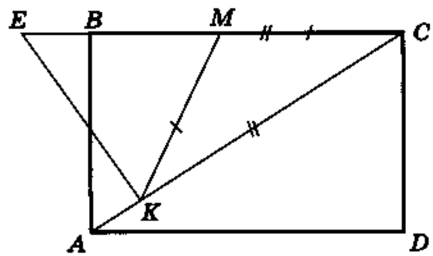


Рис. 123

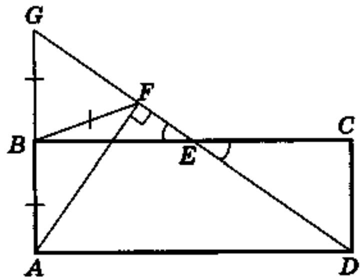


Рис. 124

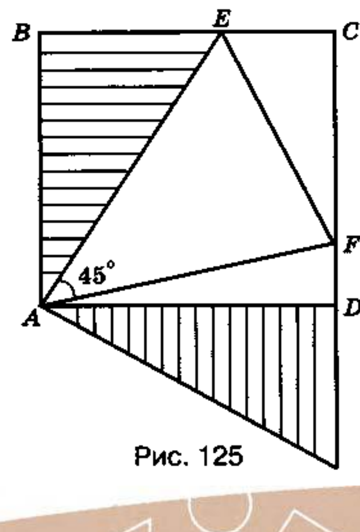


Рис. 125

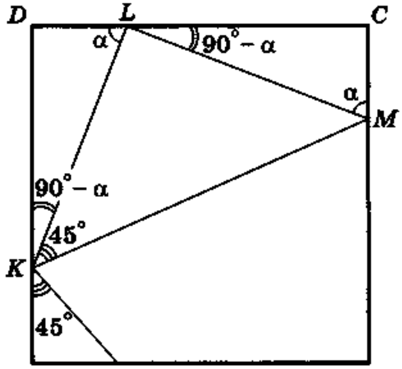


Рис. 126

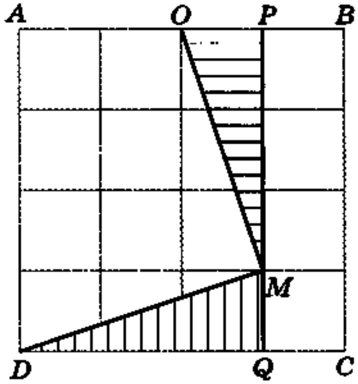


Рис. 127

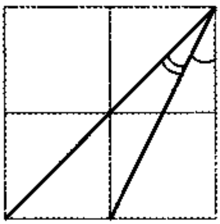


Рис. 128

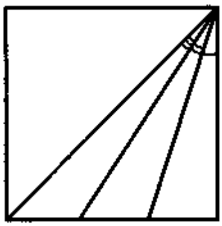


Рис. 129

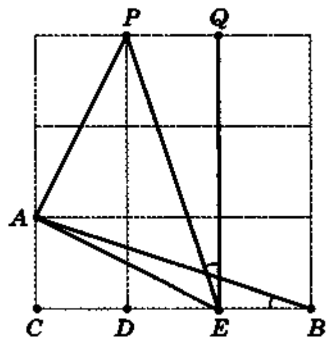


Рис. 130

Тогда $\angle NPC = 2\alpha$ и $\angle PNC = 90° - \alpha$, поэтому $\triangle NBC = \triangle QDC$. **6.34.** Составьте квадрат $ABCD$ из квадратов, сторона каждого из которых в четыре раза меньше (рис. 127). Докажите, что заштрихованные на рисунке 127 прямоугольные треугольники MOP и DMQ равны (по двум катетам). **6.35.** Рассматриваемые углы равны двум другим углам, составляющим в сумме 45° (рис. 128). **6.36.** Рассматриваемые углы равны трём другим углам, составляющим в сумме 45° (рис. 129). **6.37.** Пусть на сторонах AB и AD квадрата $ABCD$ отмечены точки M и N так, что $AM + AN = AB$. Докажите, что $\angle MDN = \angle NCD$ и $\angle MBN = \angle MCB$. **6.38.** Постройте на катете BC квадрат и разделите каждую его сторону на три равные части (рис. 130). Сначала докажите, что треугольник APE равнобедренный прямоугольный и $\angle PEQ = \angle ABC$. Затем воспользуйтесь тем, что $\angle CEA + \angle AEP + \angle PEQ = 90°$. **6.39.** Докажите, что $\angle 1 + \angle 3 = 45° = \angle 2 + \angle 3$ (рис. 131).

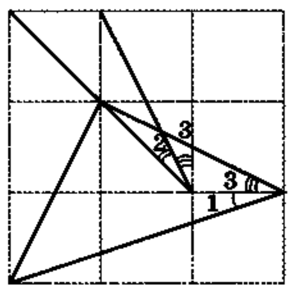


Рис. 131

Глава 7. Сумма углов треугольника

7.1. Пусть $\angle A = 2\alpha$ и $\angle B = 2\beta$. Тогда $\angle AMC = 90° - \alpha$ и $\angle BNC = 90° - \beta$, поэтому $\angle NCM = 180° - (90° - \alpha) - (90° - \beta) = \alpha + \beta = 45°$. **7.2.** Пусть $\angle A = \alpha$ и $\angle B = \beta$. Тогда $\angle C = \angle ACM + \angle MCB = \alpha + \beta$. Поэтому $\angle C = 90°$. **7.3.** Пусть CD — биссектриса треугольника, $\angle A = \alpha$ и $\angle B = 120° + \alpha$. Тогда $\angle C = 60° - 2\alpha$ и $\angle CDB = 30°$. **7.4.** Треугольники ACD и BCE равны по двум сторонам и углу между ними. Следовательно, $\angle OAB + \angle OBA = \angle CAB - \angle CAD + \angle CBA + \angle CBE = \angle CAB + \angle CBA$, поэтому $\angle AOB = \angle ACB$. **7.5.** Сначала, воспользовавшись теоремой о сумме углов треугольника, докажите равенство углов EAC и EBD и равенство треугольников EAC и EBD. Затем докажите равенство треугольников OAD и OBC и равенство треугольников OAE и OBE. **7.6.** Рассмотрите дополнительно угол 3 (рис. 132). Покажите, что $\angle 1 + \angle 3 = 120° = \angle 2 + \angle 3$. **7.7.** Пусть луч AO пересекает сторону BC в точке K. Тогда $\angle AOC > \angle AKC > \angle ABC$. **7.8.** Сначала докажите, что $\angle DEC = 2\angle DAC$. **7.9.** Отложите на продолжении стороны BC за точку C отрезок CD, равный CE. Тогда $AB = DB$ и $AE = DE$. Пусть $\angle EAD = \angle EDA = \alpha$. Тогда $\angle A = \angle CDE = \angle CED = 2\alpha$ и $\angle C = 4\alpha$. **7.10.** Согласно свойству внешнего угла $\angle BMA = \angle ACM + \angle CAM$. **7.11.** Пусть O — точка пересечения биссектрис AA_1 и BB_1. Сначала на продолжении отрезка BB_1 за точку B_1 отложите отрезок B_1D, равный BB_1, а затем докажите, что треугольники AOD и BOA_1 равнобедренные. **7.12.** Пусть $\angle MAC = \angle BAN = \alpha$ и $\angle NAM = \angle ANM = \beta$ (рис. 133). Тогда $\angle A = 2\alpha + \beta$ и $\angle C = 180° - \alpha - 2\beta$. Поэтому $\angle CAN = \alpha + \beta = 60°$. **7.13.** а) Из равенств $\angle AED = 180° - \angle A - \angle ADE = 180° - \angle EDF - \angle ADE = \angle FDC$ и $\angle ADE = \angle DFC$ следует, что треугольники ADE и CFD равны по стороне и прилежащим к ней углам (рис. 134).

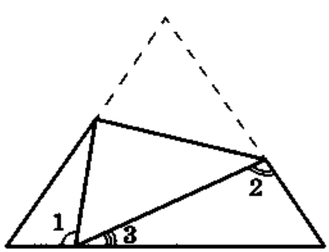


Рис. 132

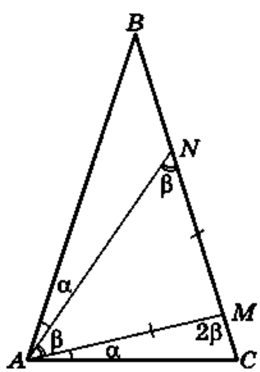


Рис. 133

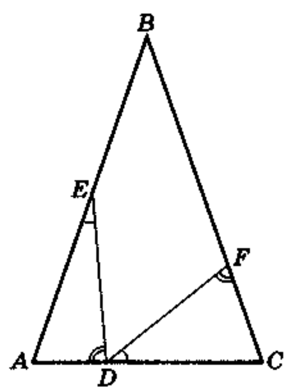


Рис. 134

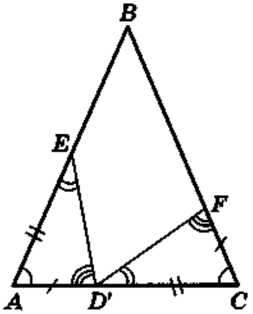


Рис. 135

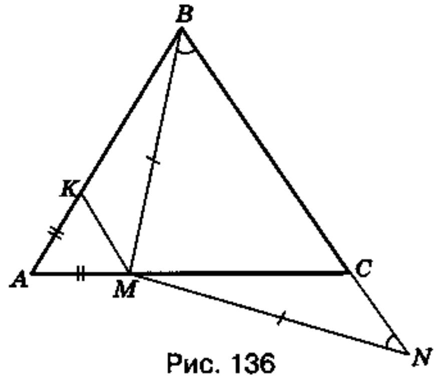


Рис. 136

Поэтому $AE + FC = CD + DA = AC$. б) Отметьте на стороне AC точку D' так, что $AD' = FC$ и $CD' = AE$ (рис. 135). Тогда треугольники EAD' и $D'CF$ равны, поэтому $D'E = D'F$, и точка D' совпадает с D. Кроме того, $\angle FD'E = 180° - \angle AD'E - \angle FD'C = 180° - \angle AD'E - \angle AED' = \angle A$. **7.14.** Отметьте на стороне AB точку K так, что $AK = AM$ (рис. 136). Тогда $\angle MKB = 120° = \angle NCM$ и $\angle KMB + 60° = \angle MBC + 60° = \angle MNC + 60°$, поэтому треугольники MKB и NCM равны по стороне и двум прилежащим к ней углам. **7.15.** Сначала докажите, что $CE = AD$ и $CK = AM$ (рис. 137), поэтому $\triangle DAM = \triangle ECK$. Затем докажите, что сумма углов E и M треугольника EPM равна сумме углов D и M треугольника ADM. **7.16.** Пусть $\angle A = \alpha$ и $\angle QPC = x$. Тогда $\angle B = 90° - \frac{\alpha}{2}$ и $\angle C = \angle BCP + \angle PCQ = \alpha + 90° - \frac{x}{2}$, поэтому $x = 3\alpha$. **7.17.** Треугольники AQP, QPC и PCB равнобедренные с углами α, 2α и 3α при основании, поэтому сумма углов треугольника ABC равна 7α. **7.18.** Треугольники ARQ, RQP, QPC и PCB равнобедренные с углами α, 2α, 3α и 4α при основании, поэтому сумма углов треугольника ABC равна 9α. **7.19.** а) Треугольники ADB и ADC прямоугольные равнобедренные. б) Если $\angle B = \angle C = \alpha$, то $\angle DAC = \angle ADC = 2\alpha$ и $\angle A = 3\alpha$. в) Если $\angle C = \alpha$, то $\angle B = \angle ADB = 2\alpha$. г) Если $\angle C = \alpha$, то $\angle DAB = \angle ADB = 2\alpha$ и $\angle A = \alpha + 2\alpha = 3\alpha$. **7.20.** Совместите стороны AB и A_1B_1 и углы A и A_1. Если точки C и C_1 при этом

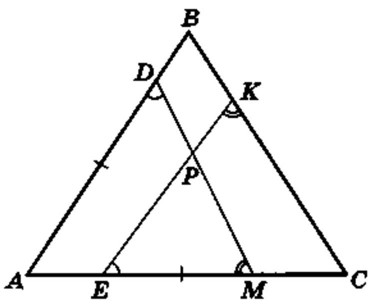


Рис. 137

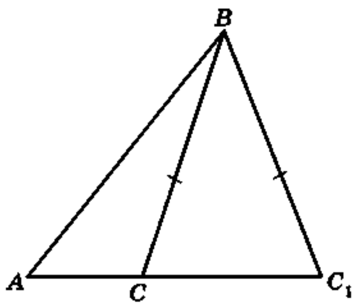


Рис. 138

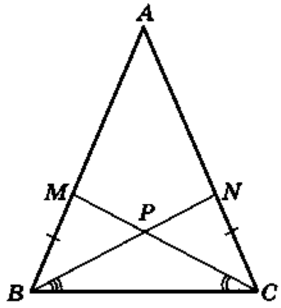


Рис. 139

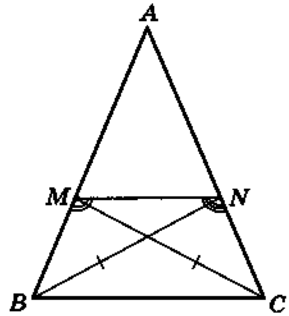


Рис. 140

не совпадут (рис. 138), то треугольник CBC_1 равнобедренный. В треугольниках ABC и $A_1B_1C_1$ один из углов C и C_1 равен углу при основании этого равнобедренного треугольника, а другой равен смежному углу. 7.21. Углы C и C_1 острые, поэтому равенство $\angle C + \angle C_1 = 180°$ выполняться не может. 7.22. Треугольники BCM и CBN либо равны (и тогда равны углы B и C треугольника ABC), либо их углы MCB и NBC составляют в сумме $180°$ (рис. 139). Второй случай невозможен, так как тогда сумма углов треугольника BPC, где P — точка пересечения отрезков BN и CM, больше $180°$.

7.23. Треугольники CNM и BMN либо равны (и тогда равны треугольники BCM и CBN, поэтому равны углы B и C треугольника ABC), либо их углы CNM и BMN составляют в сумме $180°$ (рис. 140). Второй случай невозможен, так как тогда сумма углов треугольника AMN больше $180°$. **7.24.** Треугольник ACM равнобедренный с углом C, равным $40°$. Равенство $AM = CM$ можно доказать разными способами. **Первый способ.** Пусть O — точка пересечения прямой BM и биссектрисы угла A (рис. 141). Треугольники CAO и CMO равны по общей стороне и прилегающим к ней углам. **Второй способ.** Построим на стороне AC равносторонний треугольник ANC (рис. 142). Треугольник

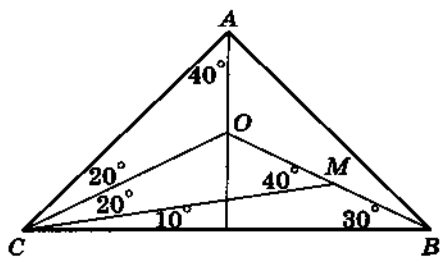


Рис. 141

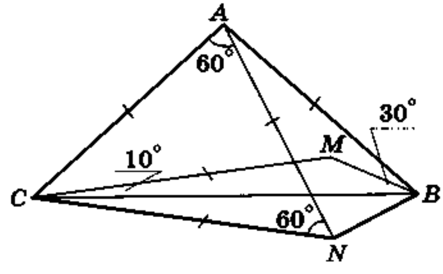


Рис. 142

BAN равнобедренный, и $\angle ABN = 80°$. Поэтому $\angle CBN = 30°$ и треугольники BMC и BNC равны по общей стороне и прилегающим к ней углам. **7.25.** Пусть O — точка пересечения биссектрисы угла B и прямой CQ (рис. 143). Треугольник ACO равносторонний, а в треугольнике ACP углы A и P равны $50°$, поэтому $OA = CO = AC = CP$. Пусть M — точка пересечения прямых AO и BC. Углы M и O треугольника MPO равны $40°$, поэтому $OP = MP$. Точки P и Q равноудалены от точек O и M, значит, прямая PQ — серединный перпендикуляр к отрезку OM. Поэтому $\angle APQ = \angle APO + \angle OPQ = 30° + 50° = 80°$. **7.26.** Предположите, что $\angle A + \angle B > 120°$, $\angle B + \angle C > 120°$ и $\angle A + \angle C > 120°$. Тогда, сложив эти неравенства, получим, что $\angle A + \angle B + \angle C > 180°$. **7.27.** Пусть $\angle AC'B' = \alpha$, $\angle CB'A' = \beta$ и $\angle BA'C' = \gamma$ (рис. 144). Сумма углов треугольника $A'B'C'$ равна $(180° - \alpha - \gamma) + (180° - \beta - \gamma) + (180° - \alpha - \beta)$, поэтому $\alpha + \beta + \gamma = 180°$. Треугольники $A'B'C$ и $B'A'C'$ равны по стороне и прилежащим к ней углам. **7.28.** Пусть количество полученных треугольников равно n. Тогда сумма всех углов этих треугольников равна $180° \cdot n$. Но каждая из 10 точек даёт в эту сумму вклад $360°$, а каждая из четырёх вершин квадрата даёт вклад $90°$. Поэтому $180° \cdot n = 10 \cdot 360° + 360°$. **7.29.** Пусть получилось k треугольников. С одной стороны, сумма всех углов этих треугольников равна $k \cdot 180°$. С другой стороны, вершины этих треугольников — это вершины исходного треугольника и отмеченные точки. Углы с вершинами в вершинах исходного треугольника дают вклад $180°$, а углы с вершинами в отмеченных точках дают вклад $n \cdot 360°$. Следовательно, $k \cdot 180° = n \cdot 360° + 180°$, т. е. $k = 2n + 1$.

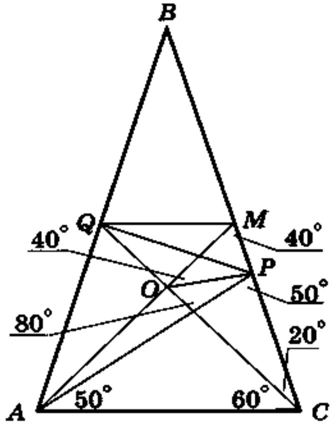


Рис. 143

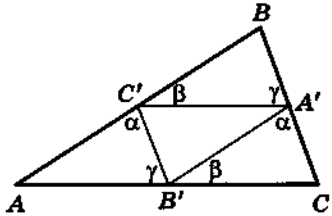


Рис. 144

Глава 8. Медианы, биссектрисы и высоты треугольника

8.1. Пусть сторона BC треугольника ABC вдвое больше стороны AB, AM — медиана, BD — биссектриса (рис. 145). Тогда

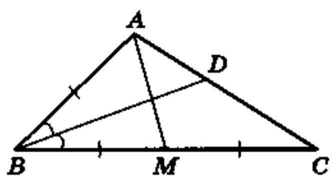


Рис. 145

$AB = \frac{1}{2}BC = BM$. В равнобедренном треугольнике AMB биссектриса угла B перпендикулярна основанию AM. **8.2.** Пусть медиана AM треугольника ABC перпендикулярна биссектрисе BD (рис. 146). Биссектриса BD разрезает треугольник ABM на два треугольника с общей стороной и соответственно равными углами при этой стороне, поэтому $AB = BM$ и $BC = 2BM = 2AB$. **8.3.** Предположите, что биссектриса AD остроугольного треугольника ABC вдвое больше высоты AH. Тогда $\angle HAD = 60°$ и $\angle A > 120°$. **8.4.** Обозначим точку пересечения биссектрисы, высоты и серединного перпендикуляра буквой M (рис. 147). Тогда $\angle MBA = \angle MAB = \frac{1}{2}\angle A$, поэтому сумма острых углов прямоугольного треугольника ABH равна $\frac{3}{2}\angle A$. **8.5.** Отрезок HM является медианой прямоугольного треугольника BCH, проведённой к гипотенузе BC. **8.6.** Пусть $\angle C = 2\gamma$ (рис. 148). Тогда $\angle MAC = \gamma$ и $\angle MHC = \angle C = 2\gamma$. Угол MHC — внешний угол треугольника AMH, поэтому $\angle AMH = \gamma$. **8.7.** Угол ADB — внешний угол треугольника BDC, поэтому $\angle ADB = \frac{\angle B}{2} + \angle C = \frac{\angle A + \angle B + \angle C}{2} + \frac{\angle C - \angle A}{2} = \frac{\angle C - \angle A}{2} + 90°$.

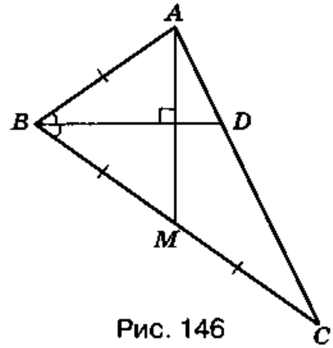


Рис. 146

8.8. Проведите из точки D перпендикуляры DP и DQ к прямым AC и AB (рис. 149). Треугольники ABC и EBD равнобедренные с общим углом при вершине B, поэтому $\angle BED = \angle ACB$. Следовательно, прямоугольные треугольники EDQ и CDP равны по катету и

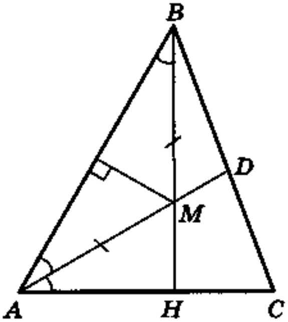


Рис. 147

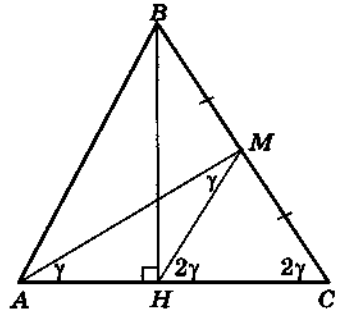


Рис. 148

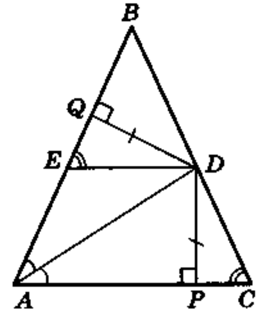


Рис. 149

противолежащему острому углу. **8.9.** Проведите из точки D перпендикуляры DP и DQ к сторонам AB и BC, а из точки E проведите перпендикуляр ER к стороне AB (рис. 150). Прямоугольные треугольники ARE и CQD равны по гипотенузе и острому углу, поэтому $ER = DQ = DP$. **8.10.** Отрезок A_1O является медианой прямоугольного треугольника CHA_1, проведённой из

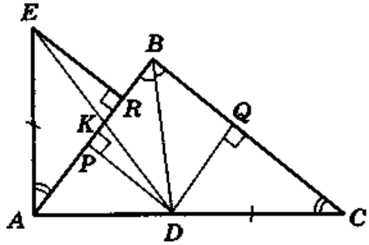


Рис. 150

вершины прямого угла, поэтому $A_1O = \frac{1}{2}CH$. Аналогично $B_1O = \frac{1}{2}CH$. **8.11.** а) Перпендикуляр, проведённый из точки одной стороны острого угла к другой стороне, лежит внутри этого угла. Поэтому если углы A и B треугольника ABC острые, то высота, проведённая из вершины C, лежит внутри треугольника. б) Для высоты, проведённой из вершины тупого угла, см. указание к задаче а). Из вершины острого угла тупоугольного треугольника высота проводится из точки одной стороны тупого угла к прямой, содержащей другую сторону. Такая высота лежит вне этого угла. **8.12.** Если угол C не прямой, то $AH < AC$ и $BD < BC$. Нестрогие неравенства $AH \leqslant AC$ и $BD \leqslant BC$ выполняются для любого угла C, поэтому $BC \leqslant AH \leqslant AC \leqslant BD \leqslant BC$. Это возможно лишь в том случае, когда $AC = BC$ и угол C прямой. **8.13.** Точка M лежит на биссектрисе угла A треугольника ABC, а точка N лежит на биссектрисе угла A треугольника AB_1C_1, поэтому точки M и N лежат на биссектрисе угла BAC. **8.14.** Точка O равноудалена от прямых DB и BC и от прямых EC и CB, поэтому она равноудалена от прямых AB и AC. Луч BO и точка C лежат по одну сторону от прямой AB, поэтому точки O и C лежат по одну сторону от прямой AB. Аналогично точки O и B лежат по одну сторону от прямой AC. Следовательно, точка O лежит внутри угла BAC. **8.15.** Пусть $\angle MKB = \alpha$ и $\angle KMB = \beta$. Тогда $\alpha + \beta = 120°$, поэтому $\angle AKN = 180° - 60° - \beta = \alpha$ и $\angle CMN = \beta$ (рис. 151). Биссектрисы KB и MB внешних углов треугольника KMN пересекаются в точке B, поэтому биссек-

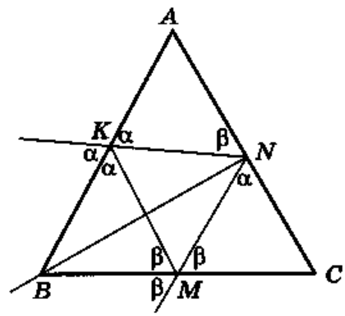


Рис. 151

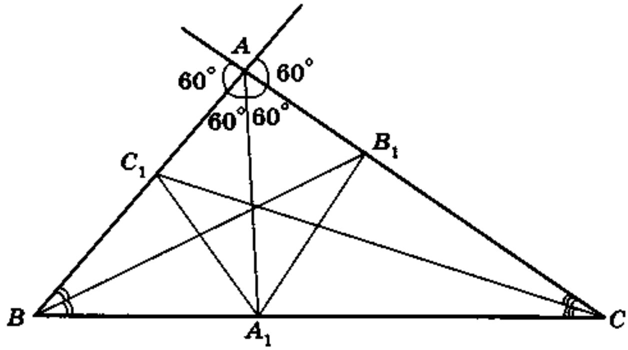


Рис. 152

триса угла KNM проходит через точку B. **8.16.** Внешний угол с вершиной A треугольника ABC равен $60°$ (рис. 152). Поэтому луч AB_1 является биссектрисой внешнего угла треугольника ABA_1. Луч BB_1 является биссектрисой угла B этого треугольника. Поэтому луч A_1B_1 является биссектрисой угла AA_1C. Аналогично луч A_1C_1 является биссектрисой угла AA_1B. Угол между биссектрисами двух смежных углов равен $90°$. **8.17.** Пусть $\angle B = 2\beta$ и $\angle C = 2\gamma$ (рис. 153). Тогда $2\beta + 2\gamma = 180° - 120° = 60°$, поэтому $\beta + \gamma = 30°$. Треугольники BOC и QOC равны по двум сторонам и углу γ между ними, поэтому $\angle QOA = 180° - 120° - \beta = 60° - \beta$. Аналогично $\angle POA = 60° - \gamma$. Следовательно, $\angle POQ = \angle POA + \angle QOA = 120° - \gamma - \beta = 90°$. **8.18.** Пусть O — точка пересечения прямой BM и биссектрисы угла A (рис. 154).

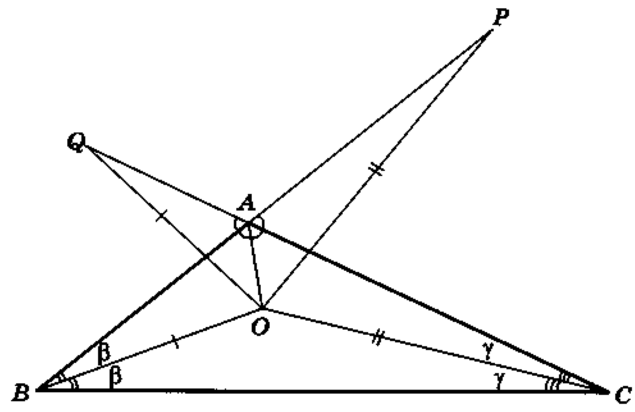


Рис. 153

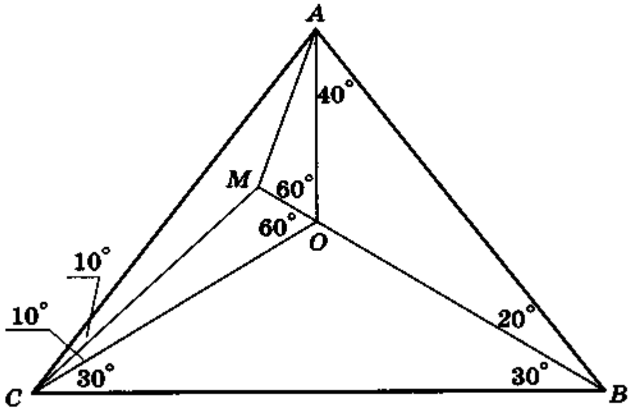


Рис. 154

Тогда $\angle ACM = 10° = \angle OCM$ и $\angle COM = 60° = \angle AOM$, поэтому M — точка пересечения биссектрис треугольника ACO. Следовательно, $\angle MAO = 20°$. 8.19. Пусть O — точка пересечения прямых BN и CM (рис. 155). Углы B и C треугольника BCO равны 50° и 40°, поэтому $NB \perp CM$. Отметьте на отрезке CO точку M' так, что $OM' = OM$. К треугольнику NBC и точке M' можно применить результат задачи 8.18 и получить, что $\angle M'NB = 60°$. Поэтому $\angle NMC = \angle NM'O = 30°$. 8.20. Удвойте медиану BM и постройте точ-

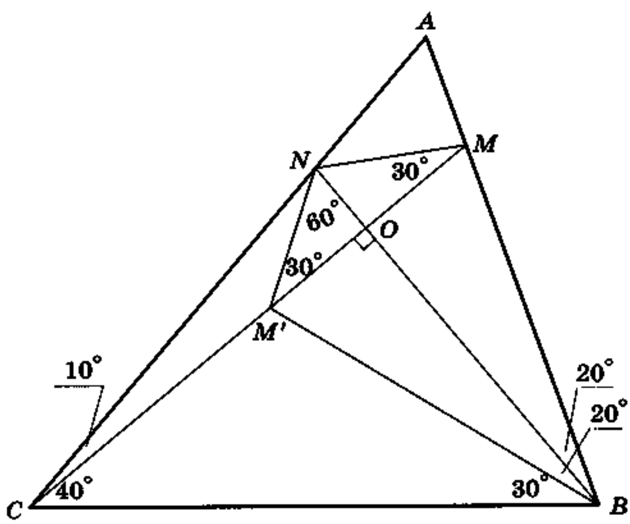


Рис. 155

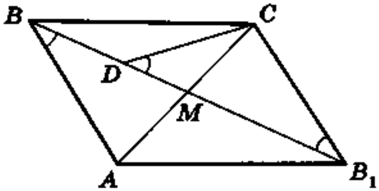


Рис. 156

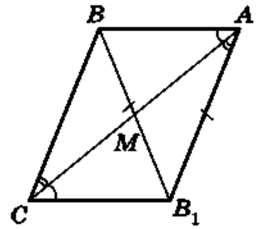


Рис. 157

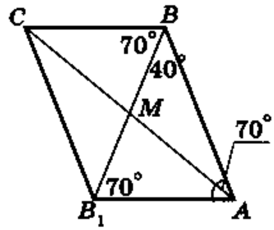


Рис. 158

ку B_1 (рис. 156). Тогда $\angle CDM = \angle ABM = \angle CB_1M$, поэтому $CD = CB_1 = AB$. **8.21.** Удвойте медиану BM и постройте точку B_1 (рис. 157). Тогда $\angle BAB_1 = \angle A + \angle C = \angle ABM$, поэтому треугольник AB_1B равнобедренный и $BC = AB_1 = BB_1 = 2BM$. **8.22.** Пусть у треугольников ABC и $A'B'C'$ равны медианы BM и $B'M'$, стороны AB и $A'B'$ и стороны BC и $B'C'$. Удвойте медианы и постройте точки B_1 и B_1'. Треугольники ABB_1 и $A'B'B_1'$ равны по трём сторонам, поэтому треугольники ABC и $A'B'C'$ тоже равны. **8.23.** Пусть у треугольников ABC и $A'B'C'$ равны медианы BM и $B'M'$ и равны углы, на которые эти медианы разбивают углы B и B'. Удвойте медианы и постройте точки B_1 и B_1'. Треугольники ABB_1 и $A'B'B_1'$ равны по стороне и прилегающим к ней углам, поэтому треугольники ABC и $A'B'C'$ тоже равны. **8.24.** Удвойте медиану BM и постройте точку B_1 (рис. 158). Треугольник ABB_1 равнобедренный, поэтому $\angle B_1BC = \angle BB_1A = 70°$ и $\angle ABC = \angle ABB_1 + \angle B_1BC = 40° + 70° = 110°$. **8.25.** Удвойте медиану BM и постройте точку B_1 (рис. 159). В треугольнике ABB_1 проведите медиану B_1D. Тогда $BD = \frac{1}{2}AB = BB_1$, поэтому треугольник BDB_1 равносторонний. Медиана B_1D треугольника ABB_1 равна половине стороны AB, поэтому угол BB_1A прямой. Следовательно, $\angle ABC = \angle ABB_1 + \angle B_1BC = 60° + 90° = 150°$. **8.26.** Луч BO — биссектриса угла ABC, поэтому углы с вершиной B в треугольниках DBO и EBO равны. Сумма углов ADB и CEB равна $\frac{3}{2}(\angle A + \angle C) = 180°$. Поэтому, если наложить треугольник DBO на треугольник EBO так, чтобы совместились углы с вершиной B и стороны BO, то треугольник DOE будет равнобедренным. **8.27.** Отметьте на продолжении отрезка BD за точку D точку Q так, что $\angle ACQ = 40°$. Пусть P — точка пере-

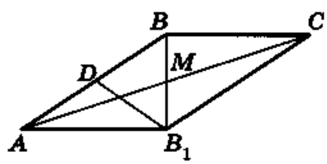


Рис. 159

сечения прямых AB и QC. Тогда $\angle BPC = 60°$ и D — точка пересечения биссектрис BQ и CA треугольника BPC. Согласно задаче 8.26 $AD = DQ$, поэтому $BD + DA = BD + DQ = BQ$. Углы при стороне CQ треугольника CBQ равны 80°, поэтому $BQ = BC$. **8.28.** В треугольниках BOE и BOD равны две стороны и угол (не между ними), поэтому либо $\triangle BOE = \triangle BOD$ (и тогда $BA = BC$), либо $\angle BDO + \angle BEO = 180°$. Во втором случае $\angle B + \angle EOD = 180°$. Кроме того, $\angle EOD = \angle AOC = 90° + \frac{1}{2}\angle B$, поэтому $\angle B = 60°$.

Глава 9. Окружность и круг

9.1. Точка O_1 равноудалена от точек A и B, поэтому она лежит на серединном перпендикуляре к отрезку AB. Точка O_2 тоже лежит на серединном перпендикуляре к отрезку AB. **9.2.** Предположите, что окружности с центрами O_1 и O_2 пересекаются в трёх точках A, B и C. Эти точки не могут лежать на одной прямой, поскольку прямая не может пересекать окружность в трёх точках. Согласно задаче 9.1 прямые AB и AC перпендикулярны прямой O_1O_2. Эти прямые не совпадают, поэтому из точки A проведены два перпендикуляра к одной прямой. **9.3.** Середины хорд, которые окружности высекают на прямой, совпадают. **9.4.** Пусть диаметр AB проходит через середину M хорды CD. Предположите, что хорда CD не является диаметром. Тогда центр O окружности не лежит на хорде CD; в частности, точки O и M различны (рис. 160). Точки O и M лежат на диаметре AB и равноудалены от точек C и D, поэтому прямая AB — серединный перпендикуляр к хорде CD. **9.5.** Предположите, что общая середина M хорд AB и CD не совпадает с центром O окружности. Тогда обе прямые AB и CD перпендикулярны прямой OM. **9.6.** Проведите из центра O окружности перпендикуляр OM к хорде. Тогда точка M — середина хорды, а расстояние от центра окружности до хорды равно OM. Точка C пересечения хорды и диаметра делит хорду на отрезки длиной 5 и 11, поэтому $CM = 3$ (рис. 161). Треуголь-

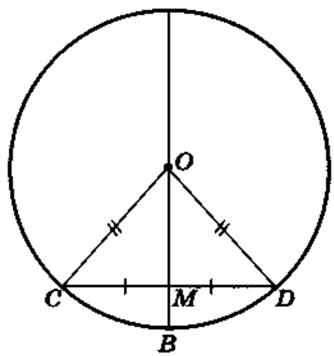


Рис. 160

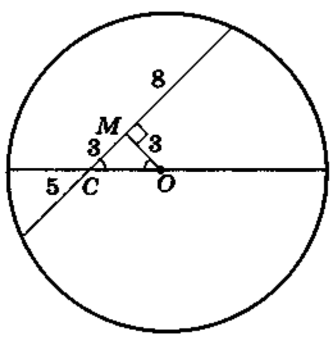


Рис. 161

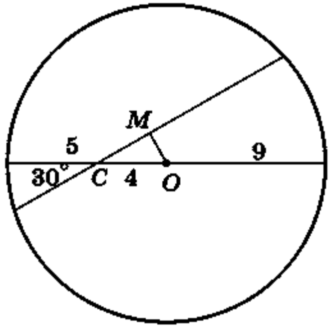


Рис. 162

ник COM равнобедренный прямоугольный, поэтому $OM = CM = 3$. **9.7.** Проведите из центра O окружности перпендикуляр OM к хорде. Тогда точка M — середина хорды, а расстояние от центра окружности до хорды равно OM. Точка C пересечения хорды и диаметра делит диаметр на отрезки длиной 5 и 13, поэтому $CO = 4$ (рис. 162). Катет OM прямоугольного треугольника COM лежит против угла 30°, поэтому $OM = \frac{1}{2}CO = 2$. **9.8.** Пусть M и N — середины хорд AB и CD, O — центр окружности, $OM = ON$. Тогда прямоугольные треугольники AOM и CON равны по гипотенузе и катету (рис. 163). **9.9.** Пусть M и N — середины хорд AB и CD, O — центр окружности. Тогда прямоугольные треугольники AOM и CON равны по гипотенузе и катету (рис. 164), поэтому прямоугольные треугольники POM и PON тоже равны по гипотенузе и катету. **9.10.** Центр окружности, точка пересечения хорд и середины хорд являются вершинами прямоугольника. **9.11.** Расстояние от середины хорды до точки пересечения хорд равно 2, поэтому центр окружности, точка пересечения хорд и середины хорд являются вершинами квадрата, сторона которого равна 2. **9.12.** Пусть стороны AB и BC треугольника ABC равны и точка M — середина основания AC. Тогда $\angle AMB = 90°$, поэтому точка M лежит на окружности с диаметром AB. **9.13.** Пусть окружность с диаметром AB проходит через середину M стороны AC. Тогда прямоугольные треугольники AMB и CMB равны по двум катетам, поэтому $AB = CB$. **9.14.** Пусть окруж-

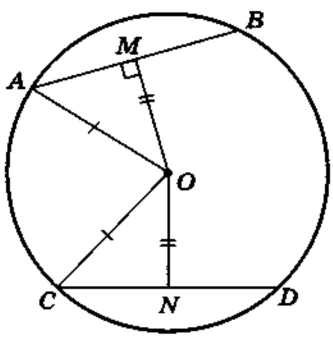


Рис. 163

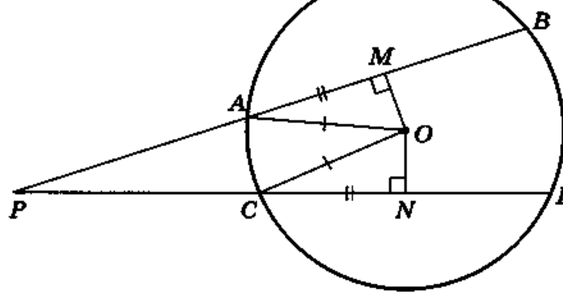


Рис. 164

ность с диаметром AC пересекает стороны AB и BC в точках D и E, причём $AD = CE$. Тогда прямоугольные треугольники ACE и CAD равны по гипотенузе и катету, поэтому $\angle A = \angle C$. **9.15.** Прямоугольные треугольники ADM и ADN равны по гипотенузе и острому углу. **9.16.** Отрезок CK перпендикулярен гипотенузе AB. **9.17.** Пусть окружность, построенная на катете AC прямоугольного треугольника ABC как на диаметре, проходит через середину M гипотенузы AB. Тогда угол AMC прямой, поэтому прямоугольные треугольники AMC и BMC равны по двум катетам, а значит,

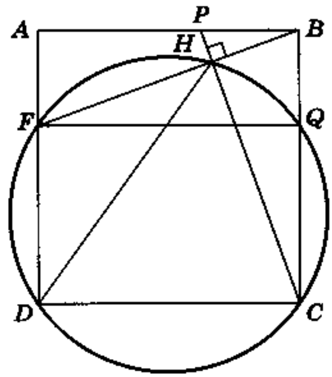


Рис. 165

$AC = BC$. **9.18.** Точка D — основание высоты, проведённой из вершины A. **9.19.** Точки A_1 и B_1 лежат на окружности, диаметром которой служит отрезок AB. **9.20.** Пусть прямая BH пересекает прямую AD в точке F (рис. 165). Прямоугольные треугольники ABF и BCP равны по катету и острому углу. Поэтому $AF = BP = BQ$. Следовательно, $CDFQ$ — прямоугольник. Все вершины этого прямоугольника лежат на окружности с диаметром FC; на этой же окружности лежит точка H. Отрезок DQ также является диаметром этой окружности, поэтому угол DHQ прямой. **9.21.** Непересекающиеся хорды разбивают круг на 3 части, а пересекающиеся — на 4. **9.22.** Если хорды попарно не пересекаются, то они разбивают круг на 4 части. Если две хорды пересекаются, а третья их не пересекает, то они разбивают круг на 5 частей. Если две хорды пересекаются, а третья либо пересекает только одну из них, либо проходит через их точку пересечения, то они разбивают круг на 6 частей. Если хорды попарно пересекаются в трёх разных точках, то они разбивают круг на 7 частей. **9.23.** Число частей наибольшее в том случае, когда хорды попарно пересекаются, а наименьшее в том случае, когда хорды попарно не пересекаются. **9.24.** Число частей наибольшее, когда окружности попарно пересекаются и все точки пересечения различны. **9.25.** См. указание к задаче 9.24.

Глава 10. Задачи на построение

10.1. Сначала постройте угол с вершиной A, равный данному углу A. Затем на одной из его сторон отложите отрезок AB, равный данной стороне, и постройте окружность с центром B, радиус которой равен данной стороне BC. Точки, в которых эта окружность пересекает другую сторону угла, это искомые вершины C. Задача может иметь два решения (как на рис. 166), одно решение или не иметь решений. **10.2.** а) Проведите сначала диаметр AB окружности с центром O, а затем через точку O проведите прямую, перпендикулярную прямой AB. Эта прямая пересекает окружность в точках C и D (рис. 167). Точки A, C, B и D — вершины искомого квадрата. б) Проведите сначала диаметр AB окружности с центром O, а затем проведите окружность радиуса AO с центром A. Эта окружность пересекает данную окружность в точках P и Q (рис. 168). Треугольник BPQ искомый. **10.3.** Отложите на продолжении стороны AC за точку A отрезок AD, равный стороне AB

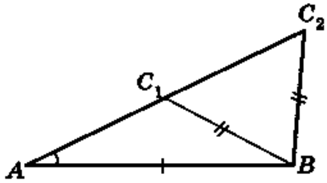


Рис. 166

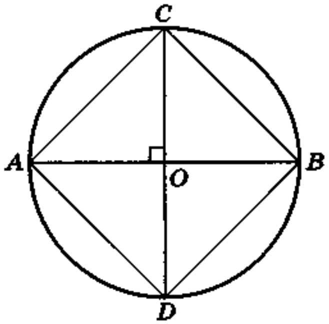


Рис. 167

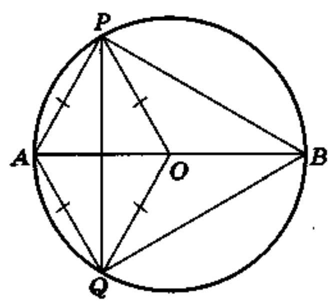


Рис. 168

(рис. 169). Тогда $\angle CBD = \angle B + \frac{\angle A}{2} = 90° - \frac{\angle C - \angle B}{2}$. В треугольнике CBD известны стороны BC и CD и угол CBD. Такой треугольник можно построить (задача 10.1). Затем проведите серединный перпендикуляр к отрезку BD и найдите вершину A. **10.4.** а) Отложите на продолжении катета BC за точку B отрезок BD, равный

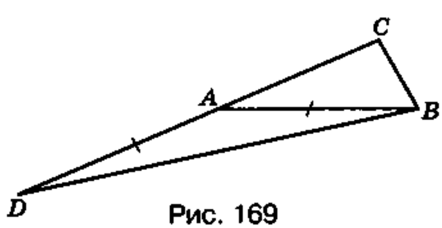


Рис. 169

гипотенузе AB (рис. 170). Прямоугольный треугольник ADC можно построить по двум катетам. Вершину B можно построить как точку пересечения стороны CD и серединного перпендикуляра к стороне AD. б) Рассмотрите прямоугольный треугольник ABC и отложите на продолжении катета BC за точку C отрезок CD, равный катету AC (рис. 171, *а*). В треугольнике ABD нам известен угол D (он равен 45°) и стороны BD и AB. Этот треугольник можно построить следующим образом. Постройте угол с вершиной D, равный 45°, отложите на одной его стороне отрезок DB, равный данной сумме катетов, и найдите точки A_1 и A_2 пересечения другой стороны и окруж-

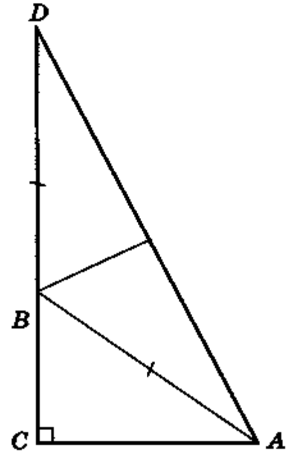


Рис. 170

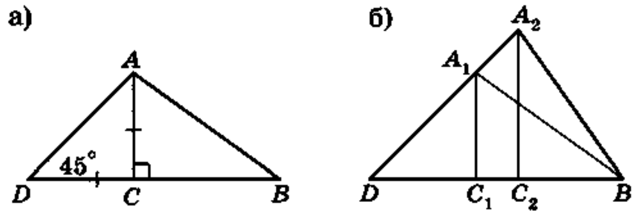


Рис. 171

ности с центром B, радиус которой равен гипотенузе (рис. 171, *б*). Из точек A_1 и A_2 проведите перпендикуляры A_1C_1 и A_2C_2 к прямой BD. Треугольники A_1BC_1 и A_2BC_2 искомые. **10.5.** Рассмотрите треугольник ABC и отложите на продолжениях стороны BC за точки B и C отрезки BB_1 и CC_1, равные сторонам AB и AC (рис. 172). Углы при основании равнобедренного треугольника AB_1B равны $\frac{\angle B}{2}$, а углы при основании равнобедренного треугольника AC_1C равны $\frac{\angle C}{2}$. В треугольнике AB_1C_1 известны сторона B_1C_1 и прилегающие к ней углы, поэтому его можно построить. Затем проведите серединные перпендикуляры к отрезкам AB_1 и AC_1 и найдите точки B и C. **10.6.** Отметьте на стороне AC треугольника ABC точку D так, что $CD = CB$, т. е.

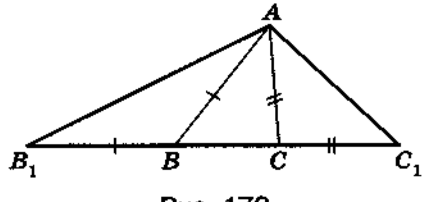


Рис. 172

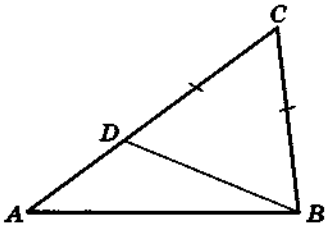


Рис. 173

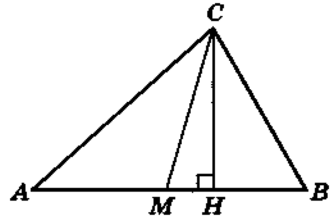


Рис. 174

$AD = AC - BC$ (рис. 173). Тогда $\angle DBC = 90° - \frac{\angle C}{2} = \frac{\angle A + \angle B}{2}$ и $\angle ADB = 180° - \frac{\angle A + \angle B}{2}$. В треугольнике ABD известны сторона AD и прилегающие к ней углы, поэтому его можно построить. Затем вершину C можно построить как точку пересечения луча AD и серединного перпендикуляра к отрезку BD. **10.7.** Рассмотрите треугольник ABC и удвойте его медиану BM, построив точку B_1. Стороны треугольника ABB_1 известны, поэтому его можно построить. Затем постройте медиану AM этого треугольника и удвойте её. В результате получена вершина C. **10.8.** Рассмотрите треугольник ABC и удвойте его медиану BM, построив точку B_1. Сторона BB_1 треугольника ABB_1 и прилегающие к ней углы известны, поэтому этот треугольник можно построить. Затем постройте его медиану AM и удвойте её. В результате получена вершина C. **10.9.** а) Сначала постройте прямоугольный треугольник CMH по гипотенузе CM и катету CH, а затем на прямой MH отложите отрезки MA и MB, равные половине стороны AB (рис. 174). б) Сначала постройте прямоугольный треугольник ADH по гипотенузе AD и катету AH. Затем от луча AD отложите по разные стороны от него два угла, равные половине угла A (рис. 175). в) Сначала постройте прямоугольный треугольник ABH по гипотенузе AB и катету AH. Затем постройте прямоугольный треугольник, равный треугольнику AMH, по гипотенузе AM и катету AH. От построенной ранее точки H на прямой BH отложите два отрезка HM_1 и HM_2, равные катету MH (рис. 176). Затем постройте два отрезка BC_1 и BC_2 так, чтобы точки M_1 и M_2 были их серединами. г) Постройте прямоугольные треугольники ABH и ACH по гипотенузе и катету; эти треугольники

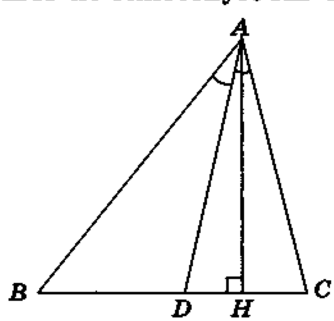


Рис. 175

могут лежать либо по одну сторону от прямой AH, либо по разные стороны. **10.10.** Постройте окружность, диаметром которой служит отрезок с концами в данных точках. Возьмите одну из точек пересечения построенной окружности с данной окружностью и проведите из неё лучи через данные точки до пересечения с данной окружностью (рис. 177). Второй прямоугольный треугольник изображён пунктиром. **10.11.** Точки A_1 и B_1 лежат на окружности с диаметром AB. Центр этой окружности можно построить как точку пересечения прямой l и серединного перпендикуляра к отрезку A_1B_1. Затем можно построить саму эту окружность и найти точки A и B. Точка C строится как точка пересечения прямых AB_1 и BA_1. **10.12.** Предположите, что прямоугольник $ABCD$ построен. Опустите из точки P перпендикуляр PR на прямую BC. Прямоугольный треугольник PQR можно построить по гипотенузе PQ и катету $PR = AB = a$. Построив точку R, постройте прямые BC и AD и опустите на них перпендикуляры из точек M и N. **10.13.** Если поместить вершину угольника на окружности, то его стороны пересекут окружность в двух точках, являющихся концами одного диаметра. Построив два диаметра, можно построить точку их пересечения, т. е. центр окружности. **10.14.** Проведите через точки A и B прямые AP и BQ, перпендикулярные прямой AB, а затем проведите произвольный перпендикуляр к прямой AP. В результате получен прямоугольник. Постройте точку пересечения его диагоналей и опустите из неё перпендикуляр на прямую AB. **10.15.** Проведите через точку B прямую l, перпендикулярную прямой AB. Затем через точку A проведите произвольно две перпендикулярные прямые; они пересекают прямую l в точках M и N. Достройте прямоугольный треугольник MAN до прямоугольника $MANR$. Основание перпендикуляра, опущенного из точки R на прямую AB, является искомой точкой C. **10.16.** Опустите из точки A перпендикуляр AP на прямую OB и постройте отрезок AC, серединой которого является точка P. Тогда

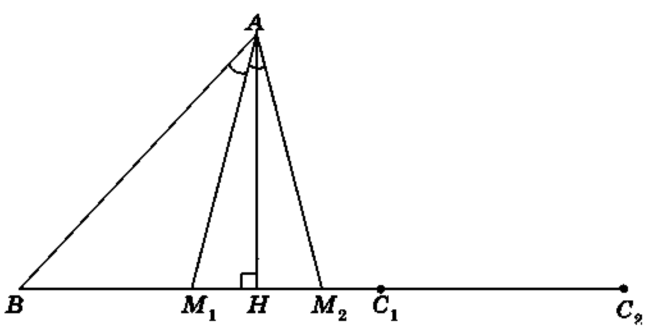


Рис. 176

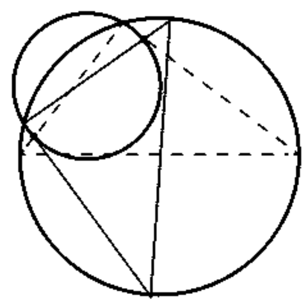


Рис. 177

угол AOC искомый. **10.17.** Постройте точку B_1 так, чтобы точка O была серединой отрезка BB_1. Расположите чертёжный угольник так, чтобы его стороны проходили через точки B и B_1, а его вершина лежала на луче OA. Пусть A_1 — вершина расположенного таким образом прямого угла. Тогда угол A_1B_1B искомый.

Глава 11. Параллельные прямые

11.1. Возьмите две параллельные прямые a и b и две прямые, которые пересекают их и сами пересекаются в точке, не лежащей на прямых a и b. **11.2.** Возьмите три параллельные прямые и прямую, их пересекающую. **11.3.** Проведите две прямые через точку на одной из параллельных прямых. **11.4.** См. рис. 178. **11.5.** Возьмите три попарно пересекающиеся прямые и проведите параллельно каждой из них две прямые. **11.6.** Согласно примеру 1 на с. 41 треугольники OBD и OCE равнобедренные. **11.7.** Треугольники OBP и OCQ равнобедренные. **11.8.** Треугольники ABC и ABD равнобедренные. **11.9.** Пусть точка O — точка пересечения указанных биссектрис. Тогда треугольники OMB и ONC равнобедренные. **11.10.** Прямая, проходящая через вершину A параллельно стороне BC, разделяет внешний угол на углы, равные углам B и C. **11.11.** Треугольники ABF и EBF равны по стороне BF и прилежащим к ней углам, поскольку $\angle AFB = 180° - \angle ADF = \angle BFE$. **11.12.** Треугольники ACE и CAD равны по стороне и прилежащим к ней углам. Поэтому равны их высоты, проведённые к стороне AC. Следовательно, $ED \parallel AC$. **11.13.** Совместите стороны AB и A_1B_1 данных треугольников так, чтобы точки C и C_1 лежали по одну сторону от прямой AB. Если прямые CD и C_1D_1 совпадают, то точки C и C_1 тоже совпадают. Если же эти прямые не совпадают, то они параллельны. В таком случае угол α (рис. 179) является внешним углом треугольника с углом β, а угол β является внешним углом треугольника с углом α. Поэтому $\alpha > \beta$ и $\beta > \alpha$, чего не может быть. **11.14.** Прямые a и b могут содержать стороны равнобедренного треугольника, а секущая — его основание. **11.15.** Прямые a и b перпендикулярны секущей. **11.16.** Пусть любая прямая, пересекающая прямую a, пересекает и прямую b. Предположите, что прямые a и b пересека-

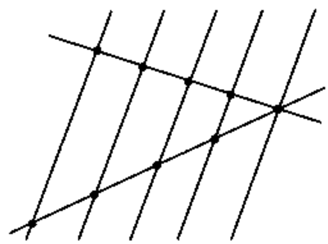


Рис. 178

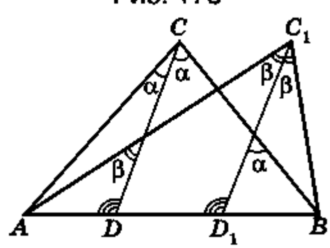


Рис. 179

ются в некоторой точке A. Проведите через точку прямой a, отличную от точки A, прямую, параллельную прямой b. Эта прямая пересекает прямую a и не пересекает прямую b. **11.17.** Проведите высоту AH. Пусть для определённости точка M лежит на окружности с диаметром AB. Тогда угол AMB прямой и прямоугольные треугольники ABM и BAH равны по гипотенузе и острому углу. **11.18.** Пусть прямая, проходящая через точку M параллельно прямой AC, пересекает прямую AB в точке P (рис. 180). Тогда $\angle CNM = \angle MAN = \angle PMA$. В треугольниках MNC и AMP, помимо углов N и M, равны также углы C и P, поэтому равны и углы M и A. Следовательно, эти треугольники равны по стороне ($MN = AM$) и прилежащим к ней углам, поэтому $CN = PM = BM$. **11.19.** Рассмотрите точку K, в которой пересекаются высота AD и прямая, проходящая через точку H параллельно стороне BC, и покажите, что луч BK — биссектриса угла B (рис. 181). Действительно, прямоугольные треугольники AHK и CBH равны по гипотенузе и острому углу, поэтому $HK = HB$, а значит, $\angle HBK = \angle HKB = \angle KBC$. **11.20.** Сначала постройте две прямые, параллельные прямой AB, так, чтобы расстояние между первой построенной прямой и прямой AB равнялось CH, а вторая прямая была равноудалена от них. Затем на второй прямой постройте точку M. **11.21.** Пусть $AB = BC$ и A_1, B_1, C_1 — основания биссектрис треугольника ABC. Тогда $A_1C_1 \parallel AC$ и $AC_1 = A_1C_1 = A_1C$ (см. задачу 11.12 и указание к ней). Из этого вытекает следующее построение. Через точку B_1 проведите прямую l, параллельную A_1C_1. На прямой l постройте точку C так, что $CA_1 = C_1A_1$ и $\angle C_1A_1C > 90°$ (рис. 182). Вершина A строится аналогично, а вершина B является точкой пересечения прямых AC_1 и A_1C. **11.22.** Проведите из точки C перпендикуляр CH к прямой OB и постройте точки пересечения прямой OB с биссектрисами угла OCH и смежного с ним угла. Через эти точки проведите прямые, параллельные прямой CH (рис. 183).

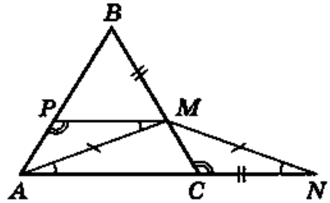


Рис. 180

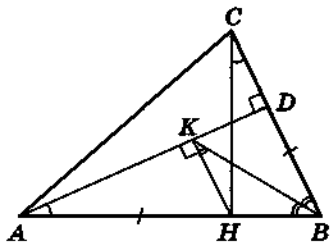


Рис. 181

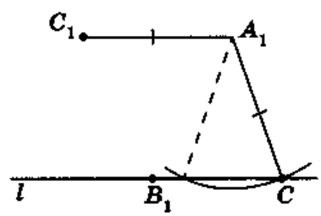


Рис. 182

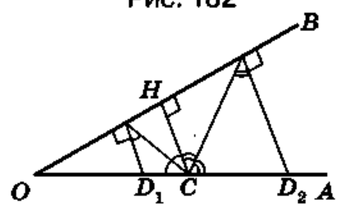


Рис. 183

12.1. Пусть $\angle A = 2\alpha$ и $\angle AMC = 2\beta$ (рис. 184). Углы MAD и AMC односторонние, поэтому $\alpha + 2\beta = 180°$. Следовательно, $45° = \angle MDC = 180° - 2\alpha - \beta = 90° - \frac{3}{2}\alpha$. **12.2.** Прямая, проходящая через середины противоположных сторон первого параллелограмма, параллельна двум другим его сторонам и равноудалена от них. Поэтому середина одной из диагоналей второго параллелограмма лежит на этой прямой. **12.3.** а) Рассмотрите квадрат $ACBD$. б) Треугольники ABC и CDA равны по трём сторонам. **12.4.** Проведите из точки M перпендикуляр MD к прямой BH (рис. 185). Тогда четырёхугольник $MDHB_1$ — параллелограмм (и даже прямоугольник). Поэтому $\angle BMD = \angle BCH = \angle MBC_1$, и, значит, прямоугольные треугольники BMD и MBC_1 равны. В частности, $BD = MC_1$. Противоположные стороны MB_1 и DH параллелограмма $MDHB_1$ равны, поэтому $BH = BD + DH = MC_1 + MB_1$. **12.5.** Пусть O — вершина данного угла, M — данная точка. Сначала отложите на луче OM отрезок $OC = 2OM$, затем проведите через точку C прямые, параллельные сторонам угла. Они пересекают стороны угла в точках A и B (рис. 186). При этом $OACB$ — параллелограмм и M — точка пересечения его диагоналей. **12.6.** Треугольники ABK, LDA и LCK равны по двум сторонам и углу между ними. **12.7.** Пусть угол α при вершине A параллелограмма $ABCD$ острый, P, Q и R — центры квадратов, построенных внешним образом на сторонах DA, AB и BC (рис. 187). Тогда $\angle PAQ = 90° + \alpha = \angle RBQ$, поэтому $\triangle PAQ = \triangle RBQ$. Стороны AQ и BQ этих треугольников перпендикулярны, поэтому $PQ \perp QR$. **12.8.** Рассмотрите параллело-

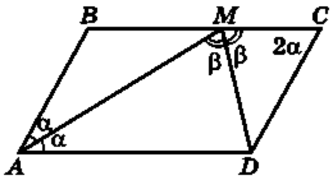


Рис. 184

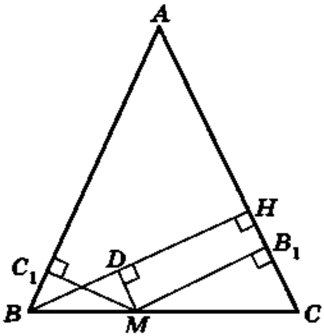


Рис. 185

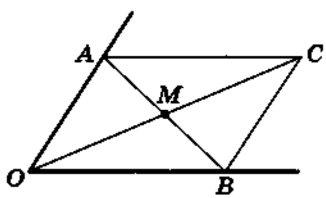


Рис. 186

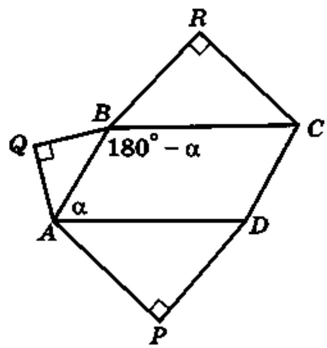


Рис. 187

грамм $BCLM$. Треугольники AKL и BMK равны по двум сторонам и углу между ними (рис. 188), поэтому $KL = MK$ и $\angle MKL = \angle MKB + \angle LKB = \angle ALK + \angle LKB = 60°$. Следовательно, треугольник MKL равносторонний и $KL = ML = BC$. **12.9.** Треугольник AKD равнобедренный, поскольку $\angle DAK = \angle DAL = \angle ADK$. Поэтому параллелограмм $AKDL$ — ромб. Диагонали ромба перпендикулярны. **12.10.** Сначала проведите биссектрису AD треугольника ABC, а затем через точку D проведите прямые, параллельные прямым AB и AC. **12.11.** Воспользуйтесь тем, что $BH < AB$.

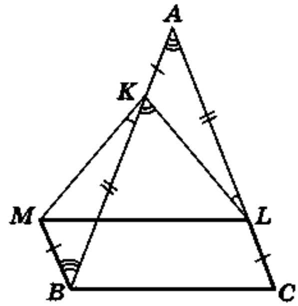


Рис. 188

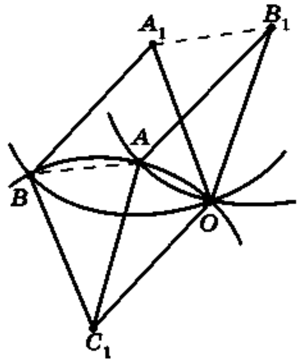


Рис. 189

12.12. Пусть O — общая точка окружностей одного радиуса с центрами A_1, B_1 и C_1; A, B и C — точки пересечения этих окружностей, отличные от точки O (окружности с центрами A_1 и B_1 проходят через точку C и т. д.). Четырёхугольники AB_1OC_1 и BA_1OC_1 — ромбы (рис. 189), поэтому четырёхугольник ABA_1B_1 — параллелограмм. **12.13.** Пусть точка O — середина стороны CD, M — точка пересечения прямых AO и BC. Тогда треугольники AOD и MOC равны по стороне и прилежащим к ней углам. Поэтому $BM = BC + CM = BC + AD = AB$, а значит, AO — биссектриса прямого угла A. **12.14.** Пусть продолжения боковых сторон AB и CD трапеции $ABCD$ пересекаются в точке O, $\angle A + \angle D = 90°$. Середины M и N оснований BC и AD лежат на луче с вершиной O, делящем прямой угол AOD на углы, равные $\angle A$ и $\angle D$ (рис. 190). Проведите через точку M прямые MP и MQ, параллельные AB и CD (точки P и Q лежат на прямой AD). Медиана MN прямоугольного треугольника PQM равна половине гипотенузы PQ, а отрезок PQ равен разности оснований трапеции. **12.15.** Треугольник BOC равнобедренный, треугольники ABO и DCO равны по стороне и прилежащим к ней углам. Поэтому стороны AB и CD четырёхугольника $ABCD$ равны, а стороны AD и BC параллельны. **12.16.** Пусть BC — меньшее основание

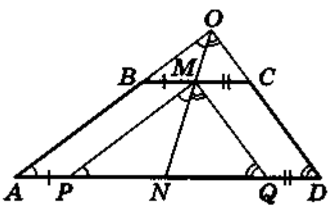


Рис. 190

трапеции $ABCD$, $\angle A = \angle D = 60°$. Проведите через точку B прямую, параллельную CD; эта прямая пересекает основание AD в некоторой точке E. Треугольник ABE равносторонний, поэтому $AD = AE + ED = AB + BC$. **12.17.** Точка пересечения диагоналей делит диагональ на части, равные основаниям трапеции. **12.18.** Диагонали данной трапеции разрезают её на 4 треугольника, два из которых — равнобедренные прямоугольные. Высоты этих треугольников, проведённые к основаниям трапеции, равны половинам оснований. **12.19.** Пусть AD — основание трапеции $ABCD$. У треугольников ADC и DAB сторопа AD общая, стороны AC и DB равны и высоты, проведённые к общей стороне, равны. Либо эти треугольники равны (и тогда трапеция равнобедренная), либо $\angle DAC + \angle ADB = 180°$. Во втором случае четырёхугольник $ACBD$ — параллелограмм, поэтому ломаная $ABCD$ самопересекающаяся. **12.20.** Пусть диагональ BD трапеции $ABCD$ равна сумме оснований AD и BC и угол между диагоналями трапеции равен 60°. Проведите через точку C прямую, параллельную диагонали BD; эта прямая пересекает прямую AD в некоторой точке E. Ясно, что $CE = BD = AD + DE = AE$. Из условия следует, что угол ACE равен 60° или 120°. Но угол при основании равнобедренного треугольника не может быть тупым, поэтому $\angle ACE = 60°$. Следовательно, треугольник ACE равносторонний и $AC = CE = BD$, т. е. диагонали трапеции равны. Согласно задаче 12.19 трапеция, диагонали которой равны, равнобедренная. **12.21.** Отложите на луче BE отрезок $BF = 2BE$. Диагонали трапеции $ABDF$ равны, поэтому согласно задаче 12.19 эта трапеция равнобедренная. Если $\angle A = 2\alpha$, то $\angle ABE = \angle AFB = \angle DAF = 3\alpha$. **12.22.** Диагональ данной трапеции разделяет её на два равнобедренных треугольника. Пусть углы равнобедренного треугольника, боковая сторона которого равна меньшему основанию, равны α, α и $180° - 2\alpha$. Тогда углы другого равнобедренного треугольника равны α, 2α и 2α. Поэтому $5\alpha = 180°$. **12.23.** Составьте трапецию из двух равнобедренных треугольников с углами при основании 36° и 72°.

Глава 13. Теорема Фалеса. Средняя линия треугольника

13.1. В равнобедренном треугольнике ABC с боковыми сторонами $AB = BC = 1$ и углом при вершине 30° проведите высоту AH (рис. 191). Средняя линия треугольника ACH, параллельная

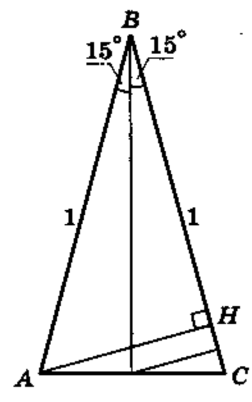


Рис. 191

AH, вдвое меньше этой высоты. **13.2.** Треугольник AC_1K равнобедренный, так как $\angle C_1AK = \angle KAC = \angle C_1KA$. Поэтому $C_1K = AC_1 = \frac{1}{2}AB$ и $A_1K = |A_1C_1 - C_1K| = \frac{1}{2}|AC - AB|$. **13.3.** Через каждую из трёх данных точек проведите прямую, параллельную прямой, проходящей через две другие точки. **13.4.** Пусть O — точка пересечения отрезков CK и AL, $\angle A = 2\alpha$. Точка O лежит на средней линии, параллельной BC, т. е. на серединном перпендикуляре к отрезку AC. Поэтому $\angle OCA = \angle OAC = \alpha$ и $\angle B = \angle BKC = 3\alpha$. **13.5.** Пусть M и N — середины сторон AC и BC. Тогда $CM = \frac{1}{2}AC = CA_1$ и $CN = CB_1$, поэтому $\Delta CA_1B_1 = \Delta CMN$. **13.6.** Перпендикуляр, проведённый из точки M к прямой BC, является средней линией треугольника AHC. **13.7.** Из равенства $AK = LB$ следует, что середина N отрезка AB является также серединой отрезка KL. Медиана MN треугольника KML равна половине стороны KL, поэтому угол KML прямой. **13.8.** Пусть K, L, M и N — середины сторон AB, BC, CD и DA четырёхугольника $ABCD$. Отрезки KL и MN — средние линии треугольников ABC и ADC, поэтому они равны половине отрезка AC и параллельны ему. Отрезки LM и KN тоже равны и параллельны, поэтому четырёхугольник $KLMN$ — параллелограмм. Этот параллелограмм — прямоугольник, если диагонали AC и BD перпендикулярны; ромб, если диагонали равны; квадрат, если диагонали равны и перпендикулярны. **13.9.** Четырёхугольник $MPNQ$ — параллелограмм, стороны которого вдвое меньше сторон AD и BC. Диагонали MN и PQ этого четырёхугольника перпендикулярны тогда и только тогда, когда его стороны равны. **13.10.** Пусть прямые DE и BC пересекаются в точке F, точка K — середина отрезка EC (рис. 192). Биссектриса CD треугольника ECF является его высотой, поэтому точка D — середина стороны EF. С одной стороны, средняя линия DK этого треугольника параллельна прямой BC, поэтому $AD = DK$. С другой стороны, медиана DK прямоугольного треугольника EDC равна половине гипотенузы EC. **13.11.** Пусть L — середина отрезка MA. Тогда NL — средняя линия треугольника BMA и $\angle BMC = \angle NLM = \angle NML$. **13.12.** Разрежьте треугольник по средней линии. **13.13.** Пусть

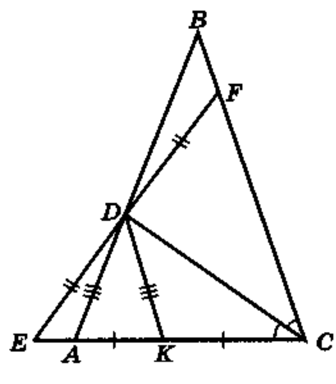


Рис. 192

M и N — середины сторон AB и AC. Тогда $\angle AMB_1 = \angle MBB_1 + \angle MB_1B = 2\angle MBB_1 = 180° - \angle B$. Поэтому точки B_1, M, N и C_1 лежат на одной прямой, $B_1M = \frac{1}{2}AB$, $MN = \frac{1}{2}BC$ и $C_1N = \frac{1}{2}AC$.

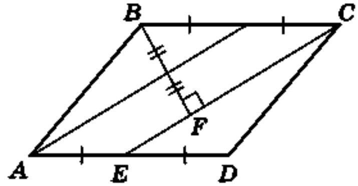


Рис. 193

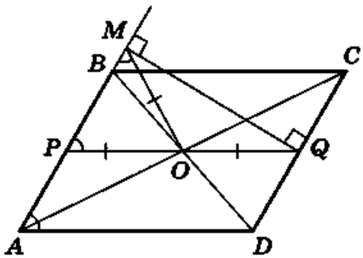


Рис. 194

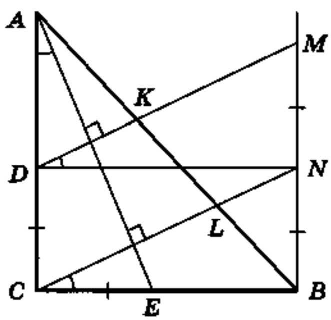


Рис. 195

13.14. Пусть B_1 и B_2 — основания перпендикуляров, проведённых из точки A к биссектрисам внутреннего и внешнего углов с вершиной B. Сначала докажите, что прямая B_1B_2 проходит через середину стороны AB и параллельна прямой BC. **13.15.** Прямая, проходящая через точку A и середину отрезка BC, параллельна прямой CE (рис. 193). Эта прямая содержит среднюю линию треугольника BFC, поэтому она делит отрезок BF пополам. **13.16.** Пусть P и Q — середины сторон AB и CD. Тогда отрезки PO и OQ — средние линии треугольников ABD и ACD. Поэтому $\angle MPO = \angle MAD = \angle PMO$ и $MO = PO = QO$ (рис. 194). Следовательно, $\angle PMQ = 90°$ и $MQ \perp CD$, т. е. MQ — серединный перпендикуляр к отрезку CD. **13.17.** Проведите через точку B прямую, параллельную AC. Пусть проведённые перпендикуляры пересекают эту прямую в точках M и N (рис. 195). Прямоугольные треугольники CBN и DNM равны треугольнику ACE по катету и прилежащему острому углу. Поэтому $BN = NM$ и NL — средняя линия треугольника KMB. **13.18.** Пусть длина каждой из медиан AA_1 и CC_1 треугольника ABC равна $3m$ и эти медианы пересекаются в точке M. Тогда $AM = 2m = CM$ и $A_1M = m = C_1M$. Поэтому треугольники AMC_1 и CMA_1 равны по двум сторонам и углу между ними. **13.19.** Пусть M и M_1 — точки пересечения медиан треугольников ABC и $A_1B_1C_1$ с соответственно равными медианами. Тогда треугольники ABM и $A_1B_1M_1$ равны по двум сторонам и медиане, проведённой к третьей стороне (задача 8.22). **13.20.** Пусть M — точка пересечения медиан AA_1, BB_1 и CC_1 треугольника ABC, D — вершина параллелограмма $AMCD$. Сначала постройте треугольник CMD по трём сторонам:

$CD = \frac{2}{3}AA_1, \quad MD = \frac{2}{3}BB_1$ и $MC = \frac{2}{3}CC_1$.

13.21. Медиана AA_1 является диагональю параллелограмма $AB_1A_1C_1$, поэтому она делит отрезок B_1C_1 пополам. **13.22.** Пусть M и N — середины боковых сторон AB и CD равнобедренной трапеции $ABCD$, CH — высота трапеции. Тогда $\angle NHD = \angle NDH = \angle MAH$, поэтому четырёхугольник $AMNH$ — параллелограмм и $MN = AH$. **13.23.** Если средняя линия трапеции делится диагоналями на три части, равные x, то меньшее основание равно $2x$, а большее основание равно $4x$ (рис. 196). **13.24.** Точки A_1 и C_1 лежат на окружности диаметром AC. Перпендикуляр OH к прямой A_1C_1, проведённый из центра этой окружности, является средней линией трапеции AA_2C_2C, поэтому $A_2H = HC_2$. Ясно также, что $C_1H = HA_1$, поэтому $A_1C_2 = C_1A_2$. **13.25.** Пусть боковая сторона AB равна сумме оснований AD и BC, K и L — середины сторон AB и CD. Отрезки AK и BK равны средней линии KL, поэтому треугольники AKL и BKL равнобедренные (рис. 197). Следовательно, AL и BL — биссектрисы углов A и B. **13.26.** Пусть точки M и N — середины сторон AB и CD. Прямые PM и QN параллельны прямой AD, поэтому точки M и N лежат на отрезке PQ, $PM = \frac{1}{2}AB$ и $QN = \frac{1}{2}CD$.

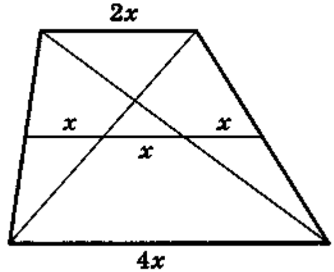


Рис. 196

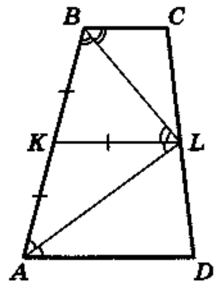


Рис. 197

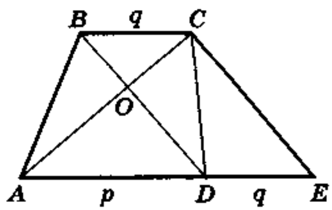


Рис. 198

13.27. Пусть точки M и N — середины сторон AB и CD. Прямые PM и QN параллельны прямой AD, поэтому точки P и Q лежат на отрезке MN, $PM = \frac{1}{2}AB$ и $QN = \frac{1}{2}CD$. **13.28.** Пусть диагонали AC и BD трапеции $ABCD$ с основаниями AD и BC пересекаются в точке O. Отложите на продолжении отрезка AD за точку D отрезок DE, равный отрезку BC (рис. 198). Четырёхугольник $BCED$ — параллелограмм, поэтому $OD \parallel CE$. Следовательно, $AO : OC = AD : DE = AD : BC$. **13.29.** Отметьте на луче BC точ-

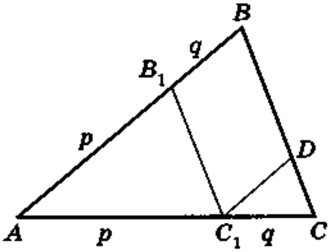


Рис. 199

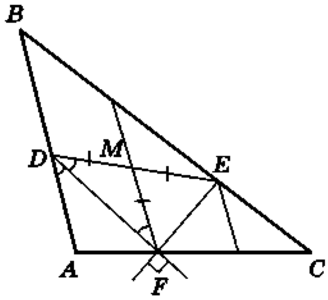


Рис. 200

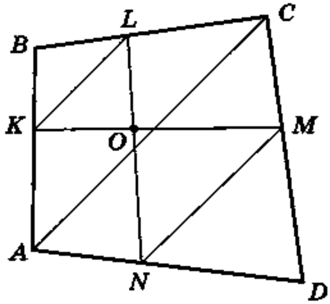


Рис. 201

ку D так, что $BD = B_1C_1$ (рис. 199). Из равенства отношений $AB_1 : B_1B$ и $AC_1 : C_1C$ следует нараллельность прямых B_1C_1 и BC, ноэтому четырёхугольник BB_1C_1D — нараллелограмм. Следовательно, $B_1C_1 : BC = BD : BC = BD : (BD + DC) = AC_1 : (AC_1 + C_1C) = p : (p + q)$. **13.30.** Проведём через точки E и F прямые, параллельные прямой AB (рис. 200). Эти прямые делят стороны AC и BC на три равные части, и прямая, проходящая через точку F, проходит также через середину M гинотенузы прямоугольного треугольника DEF. Поэтому $\angle ADF = \angle DFM = \angle MDF$. **13.31.** Проведите диагональ AC (рис. 201). Согласно задаче 13.29 $KL : AC = q : (p + q)$ и $MN : AC = p : (p + q)$, поэтому $KL : MN = q : p$. Согласно задаче 13.28 точка пересечения диагоналей трапеции $NKLM$ делит их в отношении $q : p$.

Глава 14. Вписанный угол

14.1. Точки P и Q лежат на окружности с диаметром AM, точки A и Q лежат по одну сторону от прямой PM, поэтому $\angle PAM = \angle PQM$. **14.2.** Точки A_1 и B_1 лежат на окружности с диаметром AB. Точки A и A_1 лежат по разные стороны от прямой BB_1, ноэтому $\angle BA_1B_1 = 180° - \angle BAB_1 = 180° - \angle A$. **14.3.** Точки C и H лежат на окружности с диаметром AM, точки A и C лежат по одну сторону от прямой MH, поэтому $\angle MAH = \angle MCH$. **14.4.** Проведите из точки F нерпендикуляры FK_1 и FL_1 к прямым BC и AC (рис. 202). Точки H и K_1 лежат на окружности с диаметром CF, поэтому $\angle CHK_1 = \angle CFK_1 = 45°$. Это означает, что точка K_1 совпадает с точкой K. Аналогично точка L_1 совпадает с точкой L. **14.5.** Точки A и Q лежат по разные стороны от хорды PC, поэтому $\angle PAC + \angle PQC = 180°$. Следовательно, $\angle A + \angle PQH = 90°$. Точки P и

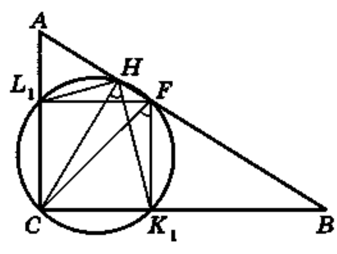


Рис. 202

Q лежат на окружности с диаметром BH, поэтому $\angle PQH = \angle PBH = \angle ABH$. Таким образом, $\angle A + \angle ABH = 90°$. **14.6.** Из равенства вписанных углов CAB и CDB следует, что $\angle ACE = 90° - \angle CAB = 90° - \angle CDB = 90° - \angle EDM$. Кроме того, $\angle DEM = \angle EDM$ (рис. 203). **14.7.** Пусть в остроугольном треугольнике ABC проведены высоты AA_1, BB_1 и CC_1. Согласно примеру 1 на с. 53 $\angle AA_1B_1 = \angle ABB_1$ и $\angle AA_1C_1 = \angle ACC_1$. Кроме того, $\angle ABB_1 = 90° - \angle A = \angle ACC_1$. Поэтому $\angle AA_1B_1 = \angle AA_1C_1$. **14.8.** а) Достройте треугольник BCP до параллелограмма $BCQP$. Тогда $\angle PQD = \angle PCD$, поэтому точки P, Q, C и D лежат на одной окружности. Следовательно, $\angle PDC = \angle PQC = \angle PBC$. б) Достройте треугольник BCP до параллелограмма $BCQP$. Тогда $\angle CQD + \angle CPD = 180°$, поэтому точки P, Q, C и D лежат на одной окружности. Следовательно, $\angle PDC = \angle PQC = \angle PBC$. **14.9.** Отметьте на отрезке CD точку E так, что $DE = AD$ (рис. 204). Углы ADC и ABC опираются на одну и ту же дугу, поэтому треугольник ADE равносторонний. Треугольники ADB и AEC имеют равные стороны AB и AC и соответственно равные углы. Действительно, углы при вершинах D и E равны 120°, углы при вершинах B и C опираются на одну дугу, поэтому углы при вершине A тоже равны. Следовательно, $EC = DB$. **14.10.** Сумма односторонних углов, образованных при пересечении прямых AC и BD секущей AB, равна 180°, поскольку $\angle MBD = 180° - \angle MND = \angle MNC = 180° - \angle MAC$. **14.11.** Вписанные углы BAC и BDC равны, поэтому равны углы при основаниях равнобедренных треугольников CAM и BDN. Следовательно, углы BMC и BNC равны, а значит, точки C, M, N и B лежат на одной окружности. Если точки C и M лежат по одну сторону от прямой NB, то $\angle NMB = \angle NCB = \angle MAD$ (рис. 205, *а*), а если по разные стороны, то $\angle NMA = 180° - \angle NMB = \angle NCB = \angle MAD$ (рис. 205, *б*). **14.12.** Острые

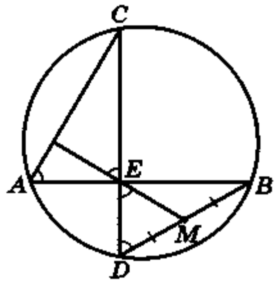


Рис. 203

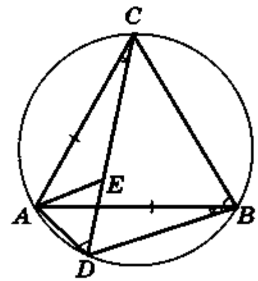


Рис. 204

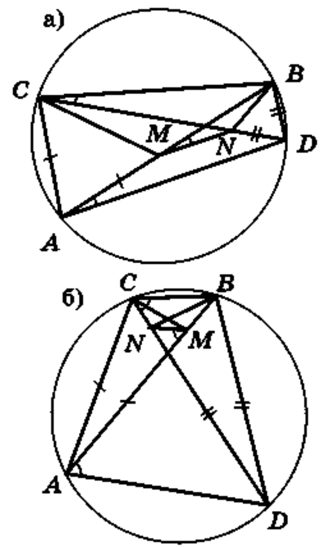


Рис. 205

углы при основаниях равнобедренных трапеций с соответственно параллельными сторонами равны, поэтому на диагонали этих трапеций опираются равные вписанные углы. **14.13.** Углы B_1AA_1 и A_1BB_1 равны, поэтому точки A, B, A_1 и B_1 лежат на одной окружности. Согласно примеру 2 на с. 53 параллельные прямые AB и A_1B_1 высекают на этой окружности равные хорды AB_1 и BA_1. Поэтому $AC = BC$. **14.14.** Пусть O — центр данной окружности. Точки P и Q лежат на окружности с диаметром OM. Вписанный в эту окружность угол POQ равен либо углу AOC, либо смежному с ним углу AOD. Длина диаметра OM постоянна, поэтому длина хорды PQ тоже постоянна. **14.15.** Угол KAL равен сумме постоянных по величине углов ACB и ALB. **14.16.** Углы DAB_1 и DAC_1 равны, поэтому $DB_1 = DC_1$. Аналогично $DB_2 = DC_2$. Кроме того, $\angle B_1B_2D = \angle C_1C_2D$ и $\angle B_2B_1D = \angle C_2C_1D$. Поэтому $\triangle DB_1B_2 = \triangle DC_1C_2$. **14.17.** Вписанные углы BAC и BOC равны. Вписанный угол DAB равен половине центрального угла DOB. Поэтому $\angle DAB = \angle DAC$. **14.18.** Точки M и C лежат по одну сторону от прямой AB, и $\angle ACB = 2\angle AMB$, поэтому точка M лежит на окружности с центром C, проходящей через точки A и B. Проведите диаметр BD этой окружности (рис. 206). Дуга DM равна 2α, а дуга MA равна $2(60° - \alpha)$. Вписанный угол BAM опирается на дугу $180° + 2\alpha$, а центральный угол BCM опирается на дугу $60° + 2(60° - \alpha)$. **14.19.** При таких условиях $\angle AMC = 180° - \angle MAC - (45° - \angle MCD) = 135° = \frac{360° - 90°}{2}$. Это означает, что точка M лежит на дуге окружности радиуса AB с центром B. Поэтому $\angle ABM = 2\angle ACM = 90° - 2\alpha$. **14.20.** Отложите на продолжении отрезка BF за точку F отрезок FD, равный BF (рис. 207). Точки A, B и D лежат на окружности с центром E, поэтому $\angle ADB = \frac{1}{2}\angle AEB$.

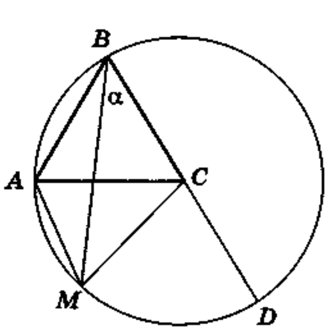


Рис. 206

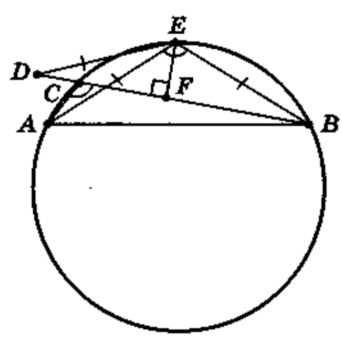


Рис. 207

Вписанные углы AEB и ACB равны. Внешний угол ACB треугольника ADC вдвое больше угла D, поэтому $AC = CD$ и $BF = DF = DC + CF = AC + CF$. **14.21.** Угол AMC — это внешний угол треугольника AMD. Он равен сумме вписанных углов ADC и BAD. **14.22.** Для определённости считайте, что точки B и D лежат на отрезках AM и CM. Угол ADC — это внешний угол треугольника AMD. Он равен сумме вписанного угла BAD и искомого угла. **14.23.** Пусть O — точка пересечения хорд A_1C_1 и B_1D_1, α, β, γ и δ — градусные меры дуг AB, BC, CD и DA. Тогда $\angle A_1OB_1 = \frac{1}{2}(\cup A_1B + \cup BB_1 + \cup C_1D + \cup DD_1) = \frac{1}{4}(\alpha + \beta + \gamma + \delta) = 90°$. **14.24.** Ясно, что $2\angle EKC = \cup MB + \cup AC$ и $2\angle EDC = \cup MC = \cup MB + \cup BC$. По условию $2\cup MB = \cup AB$, поэтому $\angle EKC + \angle EDC = 180°$.

Глава 15. Неравенства между сторонами и углами треугольника

15.1. Пусть O — середина отрезка AB. Отрезок OC пересекает окружность с диаметром AB в некоторой точке D, $\angle ADC = 90°$. Углы ADO и BDO больше углов ACO и BCO, поэтому $\angle ACB < \angle ADB = 90°$. **15.2.** Пусть O — середина отрезка AB. Продолжение отрезка OC за точку C пересекает окружность с диаметром AB в некоторой точке D, $\angle ADC = 90°$. Углы ADO и BDO меньше углов ACO и BCO, поэтому $\angle ACB > \angle ADB = 90°$. **15.3.** Длина отрезка внутри круга не превосходит длины содержащей его хорды. Если хорда AB отлична от диаметра, то можно провести диаметр AC. Катет AB прямоугольного треугольника меньше гипотенузы AC. **15.4.** Углы BAD и BCD тупые, поэтому точки A и C лежат внутри круга с диаметром BD. Отрезок, лежащий внутри круга, меньше диаметра этого круга. **15.5.** Достройте треугольник ABC до параллелограмма $ABDC$. Медиана AM равна половине диагонали AD, и $AD < AC + DC = AC + AB$. **15.6.** Сложите неравенства $AB < BM + AM$ и $AC < CM + AM$. **15.7.** Воспользуйтесь тем, что медиана треугольника меньше полусуммы двух сторон треугольника. Пусть M — точка пересечения медиан треугольника. Воспользуйтесь тем, что $AM + MB > AB$ и $AM = \frac{2}{3}AA_1$, где A_1 — середина стороны BC. **15.8.** Точки A и C лежат по одну сторону от серединного перпендикуляра к отрезку AB, поэтому медиана CC_1 лежит по ту же сторону. В частности, точка M, в которой пересекаются медианы, лежит по ту же сторону.

Следовательно, $AM < BM$ и $AA_1 < BB_1$. **15.9.** Воспользуйтесь неравенствами $AB < BC + AC$ и $AC < CD + AD$. **15.10.** Воспользуйтесь неравенствами $A_1A_n < A_1A_2 + A_2A_n$, $A_2A_n < A_2A_3 + A_3A_n$, ..., $A_{n-2}A_n < A_{n-2}A_{n-1} + A_{n-1}A_n$. **15.11.** Длина ломаной, соединяющей концы отрезка, больше длины этого отрезка. **15.12.** Пусть P — точка пересечения луча AO и стороны BC. Сложите неравенства $AB + BP > AO + OP$ и $OP + PC > OC$. **15.13.** Воспользуйтесь неравенствами $AB < AO + OB$ и $AO + OB < AC + CB$. **15.14.** Длина отрезка B_1C_1 меньше длины ломаной B_1BCC_1. **15.15.** Воспользуйтесь тем, что $A_1B_1 < A_1C + CB_1$. **15.16.** Если вершина A внутреннего треугольника ABC не лежит на стороне внешнего, то продолжите сторону AB внутреннего треугольника за вершину A до пересечения со стороной внешнего треугольника в некоторой точке D. Периметр треугольника DBC больше периметра треугольника ABC. Эту операцию можно повторить и получить треугольник, все вершины которого лежат на сторонах внешнего треугольника. **15.17.** Докажите, что $ABCM$ и $BCDM$ — параллелограммы. Достройте треугольник ABM до параллелограмма ABC_1M. Периметры треугольников BC_1M и ABM равны, поэтому равны периметры треугольников BC_1M и BCM. Следовательно, точки C_1 и C совпадают, так как иначе один из треугольников BC_1M и BCM лежал бы внутри другого и периметр внешнего треугольника был бы больше периметра внутреннего. Поэтому $ABCM$ — параллелограмм. Аналогично $BCDM$ — параллелограмм. **15.18.** Сложите неравенства $AC < AB + BC$ и $AC < AD + DC$. **15.19.** Воспользуйтесь тем, что диагональ четырёхугольника меньше половины его периметра. **15.20.** Пусть M и N — середины сторон AB и CD, K — середина стороны BC. Тогда $2MK = AC$, $2NK = BD$ и $MN < MK + NK$. **15.21.** Отметьте на луче BN точку E так, что $BE = 2BN$ (рис. 208). Тогда четырёхугольник $BCED$ — параллелограмм, а отрезок MN — средняя линия треугольника ABE. Поэтому $MN = \frac{1}{2}AE \leqslant \frac{1}{2}(BC + AD)$. **15.22.** Пусть точка M — середина отрезка AB. Тогда $\angle ACM < \angle A$ и $\angle BCM < \angle B$, поэтому $\angle C < \angle A + \angle B$. **15.23.** Воспользуйтесь тем, что $\angle ADB = \frac{1}{2}\angle B + \angle C > \angle ABD$. **15.24.** Отложите на стороне BA отрезок BC_1, равный BC. Тогда $\angle AC_1D > \angle C_1DB = \angle CDB > \angle A$. **15.25.** Проведите прямую через точку A и центр окружности. Эта прямая пересекает

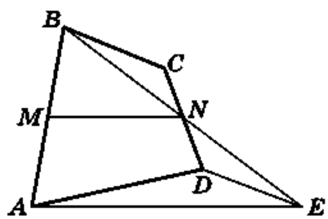


Рис. 208

окружность в точках C и D; для определённости считайте, что $AC < AD$. Пусть точка B отлична от точек C и D. Тогда угол CBD прямой, поэтому угол ABD тупой и, следовательно, $AD > AB$. Угол BCD острый, поэтому угол ACB тупой и, следовательно, $AB > AC$. **15.26.** Проведите прямую через точку A и центр O окружности. Эта прямая пересекает окружность в точках C и D; для определённости считайте, что $AC < AD$. Пусть точка B отлична от точек C и D. Тогда $\angle BCA = \angle CBO > \angle CBA$ и $\angle BDA = \angle DBO < \angle DBA$, поэтому $AB > AC$ и $AB < AD$. **15.27.** Предположите, что $BC < \frac{1}{2}AB$. Тогда $AC < BC < \frac{1}{2}AB$. Поэтому $BC + AC < AB$. **15.28.** Достройте треугольник ABC до параллелограмма $ABCD$. **15.29.** Воспользуйтесь тем, что $\angle ABD = 90° + \frac{1}{2}(\angle B - \angle A)$. **15.30.** Предположите, что на аэродроме O приземлилось по крайней мере 6 самолётов. Тогда можно выбрать аэродромы A и B так, что: 1) самолёты из A и B приземлились в O; 2) угол AOB не превосходит $\frac{360°}{6} = 60°$. Из 1) следует, что $AO < AB$ и $BO < BA$, а из 2) следует, что сторона AB треугольника AOB не больше одной из сторон AO и BO. **15.31.** Пусть $AB = AC$ и $\angle BAC = 20°$. Отметьте на стороне AB точку D так, что $BD = BC$ (рис. 209). Тогда $AD > CD > BC$. **15.32.** Приложите друг к другу три равных равнобедренных треугольника с углом 20° при вершине, как показано на рисунке 210. Тогда $AB = AE < AC + CD + DE = 3AC$. **15.33.** Внешний угол BKC больше угла A, поэтому $BK < BC = AB$. **15.34.** Пусть для определённости $\angle AMB \geqslant \angle AMC$. Тогда угол AMB прямой или тупой, поэтому $AB > AM$. **15.35.** Пусть внутри треугольника ABC расположен отрезок MN и прямая MN пересекает стороны треугольника в точках P и Q. Тогда $MN \leqslant PQ$. Пусть точки P и Q лежат на сторонах AB и AC. Тогда отрезок PQ меньше отрезка QA или отрезка QB, а отрезок QB меньше отрезка BA или отрезка BC. **15.36.** Сначала продолжите отрезок так,

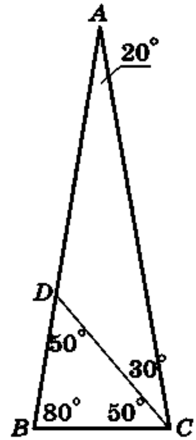


Рис. 209

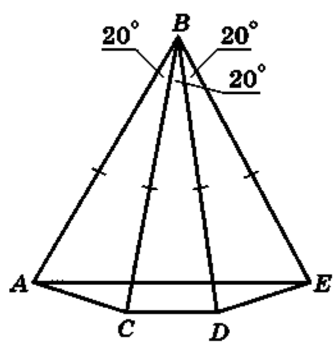


Рис. 210

чтобы оба его конца лежали на сторонах многоугольника или в его вершинах. Если конец Q отрезка PQ лежит на стороне AB, то отрезок PQ меньше одного из отрезков PA, PB, AB. **15.37.** См. рисунок 211.

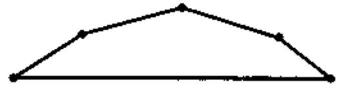


Рис. 211

Глава 16. Теорема Пифагора

16.1. По теореме Пифагора $c^2 - BH^2 = AH^2 = b^2 - (a - BH)^2$. **16.2.** По теореме Пифагора $c^2 - BH^2 = AH^2 = b^2 - (a + BH)^2$. **16.3.** Воспользуйтесь тем, что $AH^2 = AB^2 - BH^2$ и выразите BH по формулам из задач 16.1 и 16.2. **16.4.** Пусть медианы, проведённые из вершин A и B, равны $3m$ и $3n$. Тогда $c^2 = 4(m^2 + n^2)$, $a^2 = 4(4m^2 + n^2)$ и $b^2 = 4(m^2 + 4n^2)$. **16.5.** По теореме Пифагора $AP^2 + BQ^2 + CR^2 = (AM^2 - PM^2) + (BM^2 - QM^2) + (CM^2 - RM^2)$ и $PB^2 + QC^2 + RA^2 = (BM^2 - PM^2) + (CM^2 - QM^2) + (AM^2 - RM^2)$. Эти выражения равны. **16.6.** Треугольники ACX и BDX прямоугольные, поэтому $AX^2 + CX^2 = AC^2 = 4R^2$ и $BX^2 + DX^2 = BD^2 = 4R^2$, где R — радиус окружности. **16.7.** Достройте прямоугольный треугольник до квадрата, сторона которого равна сумме катетов (рис. 212). **16.8.** Постройте на большем катете внешним образом квадрат, сторона которого равна разности катетов (рис. 213). **16.9.** Пусть C — основание перпендикуляра, проведённого из точки M к прямой AB. Тогда $AM^2 = AC^2 + MC^2$ и $BM^2 = BC^2 + MC^2$. Поэтому $AM^2 - BM^2 = AC^2 - BC^2$. **16.10.** Согласно задаче 16.9 для всех точек M, лежащих на прямой, перпендикулярной прямой AB, величина $AM^2 - BM^2$ постоянна. Поэтому достаточно проверить, что для разных точек C

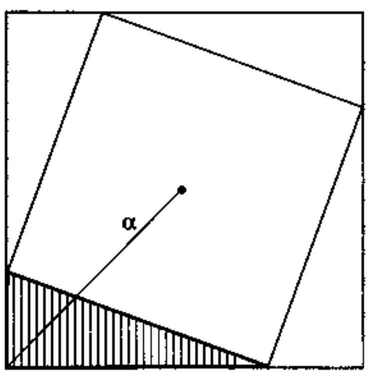


Рис. 212

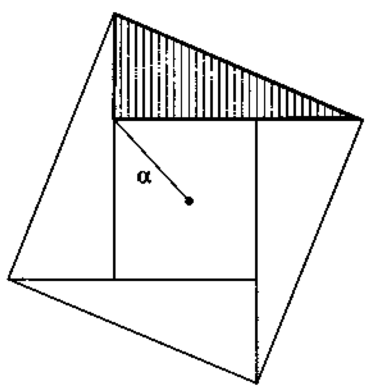


Рис. 213

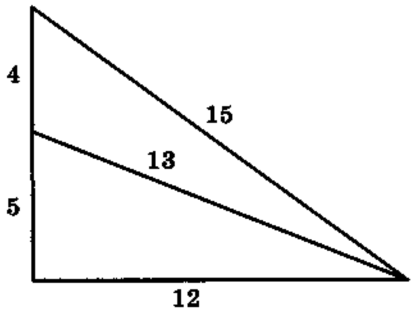


Рис. 214

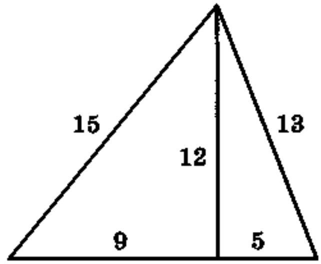


Рис. 215

прямой AB величина $AC^2 - BC^2$ принимает разные значения. Рассмотрим сначала случай, когда точки B и C лежат по одну сторону от середины O отрезка AB. В этом случае $AC^2 - BC^2 = (AO + OC)^2 - (BO - OC)^2 = 4AO \cdot OC$. Если же точки B и C лежат по разные стороны от точки O, то $AC^2 - BC^2 = -4AO \cdot OC$. **16.11.** Треугольник с катетами 12 и 9 (и гипотенузой 15) и треугольник с катетами 12 и 5 (и гипотенузой 13). **16.12.** Для тупоугольного треугольника приложите треугольники из задачи 16.11 так, чтобы они лежали по одну сторону от общего катета (рис. 214). Для остроугольного треугольника приложите треугольники из задачи 16.11 так, чтобы они лежали по разные стороны от общего катета (рис. 215). Наибольший угол полученного треугольника лежит против стороны 15; этот угол острый.

Глава 17. Подобные треугольники

17.1. а) Соответственные углы треугольников OA_1B_1 и OA_2B_2 равны, поэтому эти треугольники подобны. б) Две стороны треугольника OA_1B_1 пропорциональны сторонам треугольника OA_2B_2, а углы, заключённые между этими сторонами, равны. Следовательно, эти треугольники подобны и $\angle OA_1B_1 = \angle OA_2B_2$. **17.2.** Воспользуйтесь тем, что $A_1B_1 : A_2B_2 = OB_1 : OB_2 = B_1C_1 : B_2C_2$. **17.3.** Согласно задаче 17.1 $BC : AD = BO : OD$. Из равенства $BO = PD$ следует, что $BO : OD = DP : PB = DE : EA = DE : BC$. Следовательно, $BC^2 = DE \cdot AD = (AD - BC) \cdot AD = AD^2 - BC \cdot AD$. **17.4.** Отметьте на стороне AC точку A_2 так, что $A_1A_2 \parallel BB_1$ (рис. 216). Тогда $B_1A_2 = \frac{qm}{m+n}$,

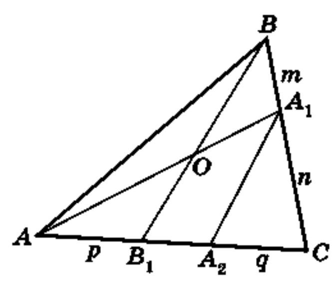


Рис. 216

поэтому, получаем $AO : OA_1 = AB_1 : B_1A_2 = p : \frac{qm}{m+n} = \frac{p}{q}\left(1 + \frac{n}{m}\right)$. **17.5.** Пусть O — точка пересечения продолжений боковых сторон трапеции, L — точка пересечения прямых l и CD (рис. 217). Тогда $OL : OC = OA : OK$ и $OC : OD = OB : OA$, поэтому $OL : OD = OB : OK$. Следовательно, $BL \parallel KD$. **17.6.** Рассмотрим середину A_2 отрезка A_1B. Из равенств $CA_1 : A_1A_2 = CP : PC_1$ и $A_1A_2 : A_1B = 1 : 2$ следует, что $CA_1 : A_1B = CP : 2PC_1$. Аналогично $CB_1 : B_1A = CP : 2PC_1$. **17.7.** Пусть прямая, параллельная основаниям AD и BC трапеции $ABCD$, пересекает боковые стороны AB и CD в точках M и N, а диагонали AC и BD — в точках K и L (рис. 218). Тогда $MK : BC = AM : AB = DN : DC = NL : BC$, поэтому $MK = NL$. **17.8.** Точки M и N делят отрезки BL и CK в равных отношениях, поскольку $BM : ML = BC : AL = BC : KD = CN : NK$. **17.9.** Выберите на диагонали AC точки B_1 и D_1 так, что $BB_1 \parallel EF$ и $DD_1 \parallel EF$ (рис. 219). Треугольники ABB_1 и CDD_1 равны по стороне и прилежащим к ней углам, поэтому $AB_1 = CD_1$. Следовательно,

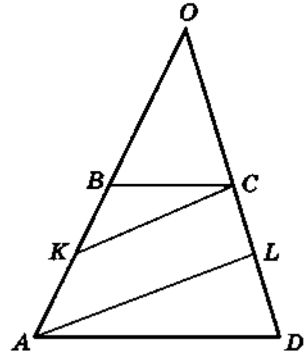


Рис. 217

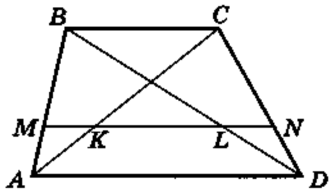


Рис. 218

$$\frac{AB}{AE} + \frac{AD}{AF} = \frac{AB_1}{AG} + \frac{AD_1}{AG} = \frac{CD_1 + AD_1}{AG} = \frac{AC}{AG}.$$

17.10. Отметьте на стороне AC точку M так, что $AM : MC = AK : KB = BL : LC$. Тогда $KM \parallel BC$ и $LM \parallel AB$. **17.11.** Проведите через точки A и D прямые, параллельные прямой MC. Они пересекают прямые CD и AB в точках E и G, а прямую BN в точках Q и R (рис. 220). Отрезки BP, PQ и QR равны, и точка N — середина отрезка QR. **17.12.** Отметьте на стороне AD точку F так,

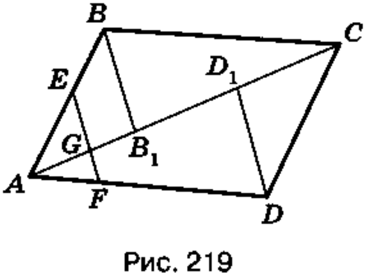


Рис. 219

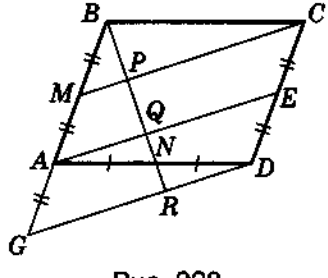


Рис. 220

что $BF \parallel CD$. Пусть E — точка пересечения отрезков MN и BF (рис. 221). Тогда $ME = \frac{q(a-b)}{p+q}$, поэтому $MN = ME + EN = \frac{q(a-b)}{p+q} + b = \frac{qa+pb}{p+q}$. **17.13.** Пусть O — точка пересечения диагоналей трапеции, P — точка пересечения продолжений боковых сторон, M — середина одного из оснований. Тогда прямая PM проходит через середину N другого основания и прямая OM тоже проходит через точку N. Поэтому точки O и P лежат на прямой MN. **17.14.** Пусть P — точка пересечения прямых AB и KN. Прямые KL, KA и KP высекают на параллельных прямых пропорциональные отрезки, поэтому $LA = AP$ (рис. 222). **17.15.** Точка биссектрисы угла равноудалена от его сторон. Пусть a — расстояние от точки A_1 до прямых AC и AB, b — расстояние от точки B_1 до прямых AB и BC. Далее, $A_1M : B_1M = p : q$. Тогда расстояния от точки M до прямых AC и BC равны $\frac{qa}{p+q}$ и $\frac{pb}{p+q}$ соответственно. Согласно задаче 17.12 расстояние от точки M до прямой AB равно $\frac{qa+pb}{p+q}$. **17.16.** Рассмотрите прямоугольный треугольник, катет которого — высота треугольника, а гипотенуза — сторона треугольника. Для биссектрисы и медианы рассмотрите один из двух треугольников, на которые они разделяют треугольник. **17.17.** Проведите биссектрису AD треугольника ABC. Тогда $\triangle ABC \sim \triangle CAD$, поэтому $AB : AC = AC : (AB - AC)$. **17.18.** Прямоугольные треугольники ABC и DAB подобны, поэтому $AB : BC = AD : AB$. **17.19.** Пусть отрезки AC_1 и CA_1 пересекаются в точке K. Из подобия пар треугольников AKA_1 и C_1KC, ABA_1 и CBC_1 следует, что $AK : C_1K = AA_1 : C_1C = BA_1 : BC_1$, поэтому $BK \parallel AA_1$. **17.20.** Из равенства $\angle A + \angle B = 90° - \frac{\angle A}{2}$ следует, что $\angle C = 90° + \frac{\angle A}{2}$. Поэтому на стороне AB можно отметить точку D так, что $AD = AC$. При этом $\angle ACD = 90° - \frac{\angle A}{2}$ и $\angle DCB = \angle C - \angle ACD = \angle A$. Следовательно,

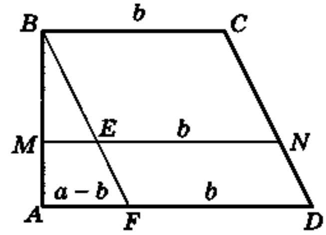


Рис. 221

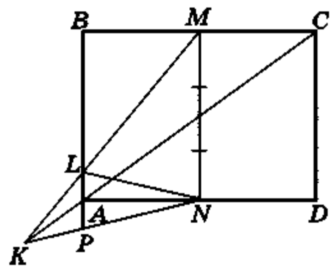


Рис. 222

$\triangle ABC \sim \triangle CBD$ и $BC : BD = AB : CB$, т. е. $BC : (AB - AC) = AB : CB$. **17.21.** Из подобия прямоугольных треугольников ABF и EDA следует, что $AB : AE = AD : AE = BF : AF$. Поэтому

$$\frac{AB^2}{AE^2} + \frac{AB^2}{AF^2} = \frac{BF^2}{AF^2} + \frac{AB^2}{AF^2} = 1.$$

17.22. Пусть проведённая прямая пересекает стороны угла с вершиной O в точках A и B. Отметим на отрезках OA и OB точки K и L так, что $PK \parallel OB$ и $PL \parallel OA$ (рис. 223). Тогда $OKPL$ — ромб; обозначим длину его стороны буквой p. Из подобия треугольников AKP и PLB получаем $(a - p) : p = p : (b - p)$. **17.23.** Проведите через точку A прямую, параллельную стороне BC. Прямые BO и CO пересекают её в некоторых точках B_2 и C_2 (рис. 224). Из подобия треугольников следует, что $\dfrac{AB_1}{B_1C} + \dfrac{AC_1}{C_1B} = \dfrac{AB_2}{BC} + \dfrac{AC_2}{BC} = \dfrac{C_2B_2}{BC} = \dfrac{AO}{OA_1}$. **17.24.** Прямоугольные треугольники ACA_1 и BCB_1 с общим углом C подобны, поэтому $CA_1 : CB_1 = CA : CB$. **17.25.** Пусть AA_1, BB_1 и CC_1 — высоты треугольника ABC, K, L, M и N — основания перпендикуляров, проведённых из точки B_1 к сторонам и высотам (рис. 225). Из задачи 17.24 следует, что прямые KN, KL и MN параллельны одной и той же прямой. **17.26.** Из подобия прямоугольных треугольников AMB и AND следует, что $AM : AN = AB : AD = AB : BC$. Кроме того, $\angle ABC = \angle MAN$, поскольку стороны этих углов взаимно перпендикулярны и эти углы либо оба острые, либо оба тупые. **17.27.** Рассмотрите треугольники со сторонами $1, a, a^2$ и a, a^2, a^3. **17.28.** Пусть точка D — середина отрезка BH. Треугольники BHA и HEA подобны, поэтому $AD : AO = AB : AH$ и $\angle DAH = \angle OAE$. Следовательно, $\angle DAO = \angle BAH$. Поэтому

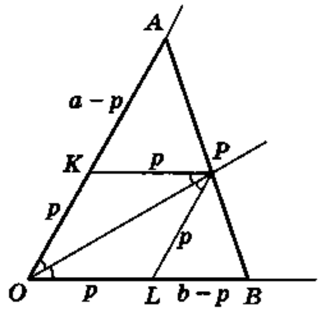


Рис. 223

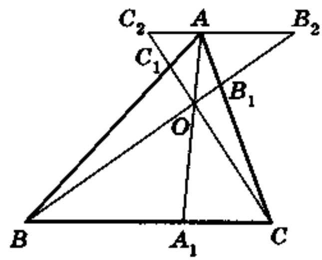


Рис. 224

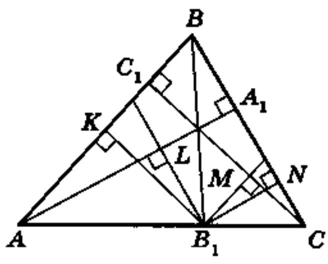


Рис. 225

$\triangle DAO \sim \triangle BAH$ и $\angle DOA = \angle BHA = 90°$. Кроме того, $DO \parallel BE$. **17.29.** Вписанные углы ACD и ABD равны. **17.30.** Стороны AM и CM треугольника AMC пропорциональны сторонам DM и BM подобного ему треугольника DMB. **17.31.** Из подобия треугольников AMC и DMB следует, что $AC : BD = AM : DM$, а из подобия треугольников AMD и CMB следует, что $AD : CB = DM : BM$. **17.32.** На продолжении отрезка BP за точку P отметим точку D так, что $PD = PC$. Тогда треугольник CPD равносторонний и $CD \parallel QP$. Поэтому $\frac{BP}{PQ} = \frac{BD}{CD} = \frac{BP + PC}{PC}$. **17.33.** Каждый из углов AKB и MCB равен

$60° - \frac{1}{2}\smile AM$, поэтому $\angle AKB = \angle MCB = \angle BAN$. Аналогично $\angle KBA =$

$= \angle MCA = \angle ANB$. Следовательно, $\triangle AKB \sim \triangle BAN$, поэтому $AK : AB =$ $= BA : BN$, т. е. $AK \cdot BN = AB^2$. **17.34.** Пусть AD — биссектриса треугольника ABC. Проведём из вершин B и C перпендикуляры BB_1 и CC_1 к прямой AD (рис. 226). Из подобия прямоугольных треугольников DBB_1 и DCC_1 следует, что $BD : CD = BB_1 : CC_1$. Из подобия прямоугольных треугольников ABB_1 и ACC_1 следует, что $BB_1 : CC_1 = AB : AC$. **17.35.** Проведите из вершин B и C перпендикуляры BB_1 и CC_1 к прямой AD (рис. 227). Из подобия прямоугольных треугольников DBB_1 и DCC_1 следует, что $BD : CD = BB_1 : CC_1$. Из подобия прямоугольных треугольников ABB_1 и ACC_1 следует, что $BB_1 : CC_1 = AB : AC$. **17.36.** Из того, что $BC = a$ и $BD : DC = c : b$, следует, что $BD = \frac{ac}{b + c}$. Пусть O — точка пересечения биссектрис AD и BE. По свойству биссектрисы треугольника $AO : OD = AB : BD$. **17.37.** Из подобия треугольников EBD и ABC следует, что $ED : AC = BD : BC$. Из свойства биссектрисы треугольника следует, что $BD = \frac{ac}{b + c}$.

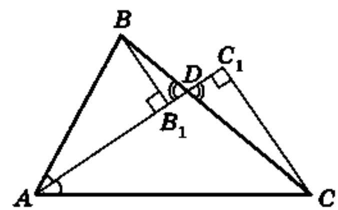


Рис. 226

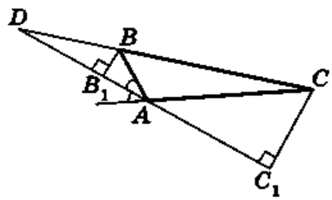


Рис. 227

17.38. Согласно свойству биссектрисы треугольника $AA_1 : A_1C =$ $= AM : MC = BM : MC = BB_1 : B_1C$. **17.39.** По свойству биссектрисы $BD = 2CD$. Кроме того, $CD = MD$. **17.40.** Проведите биссектрису AD треугольника ABC. По свойству биссектрисы $DC = \frac{AC \cdot BC}{AB + AC}$. Треугольники ABC и DAC подобны по двум углам, поэтому $AC : BC = DC : AC$. **17.41.** Пусть $AB = BC = a$ и $AC = b$. По свойству биссектрисы $BD = \frac{a^2}{a+b}$ и $DC = \frac{ab}{a+b}$ (рис. 228). По условию $BD = AC$, т. е. $\frac{a^2}{a+b} = b$. Следовательно, $\frac{a}{a+b} = \frac{b}{a}$, поэтому $CD : AC = AC : BA$. Стороны треугольников ACD и BAC, заключающие равные углы, пропорциональны, поэтому они подобны и треугольник ACD тоже равнобедренный. **17.42.** Пусть медиана BM и высота CH пересекаются в точке L. Отрезок AL является биссектрисой треугольника ABM тогда и только тогда, когда $BA : AM = BL : LM$. Кроме того, $BL : LM = CF : CM = CF : AM$.

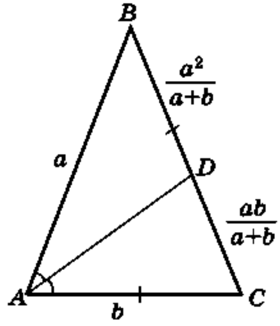


Рис. 228

Глава 18. Теоремы синусов и косинусов

18.1. Синус острого угла α равен синусу тупого угла $180° - \alpha$. **18.2.** Рассмотрите треугольник ABC с углами $\angle A = \alpha$ и $\angle B = \beta$. Пусть радиус описанной около него окружности равен R. Тогда $AB = 2R\sin(\alpha + \beta)$. Проведите высоту CC_1. Если оба угла α и β острые, то $AC_1 = 2R\sin\beta\cos\alpha$ и $BC_1 = 2R\sin\alpha\cos\beta$. Поэтому из равенства $AB = AC_1 + C_1B$ следует требуемое. Случай, когда один из углов α и β тупой или прямой, разберите самостоятельно. **18.3.** Возьмите треугольник ABC со стороной $BC = 1$ и углами $\angle A = \alpha$ и $\angle B = \beta$ и проведите перпендикуляр BH к прямой AC (рис. 229). Предположите, что углы α, β и $\alpha + \beta$ меньше 90°. Тогда $CH = AH - AC$, т. е.

$$\cos(\alpha + \beta) = \frac{\sin(\alpha + \beta)}{\sin\alpha}\cos\alpha - \frac{\sin\beta}{\sin\alpha}.$$

Воспользовавшись тем, что $\sin(\alpha + \beta) = \sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta$, легко получить требуемое. Случаи, когда один из углов α, β и $\alpha + \beta$ больше или равен 90°, разберите самостоятельно. **18.4.** Точки B, D и K лежат на окружности с диаметром AC. Для определённости будем считать, что $\angle KCA =$

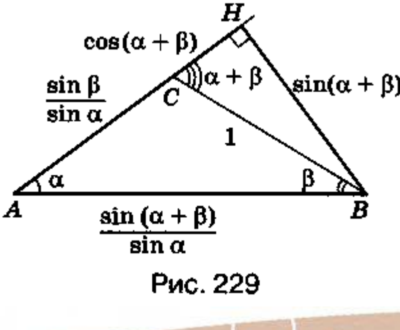


Рис. 229

$=\varphi \leqslant 45°$. Тогда $BK = AC\sin(45° - \varphi) = \frac{AC(\cos\varphi - \sin\varphi)}{\sqrt{2}}$ и $DK = AC\sin(45° + \varphi) = \frac{AC(\cos\varphi + \sin\varphi)}{\sqrt{2}}$. Кроме того, $AC\sin\varphi = AK$ и $AC\cos\varphi = CK$. **18.5.** Оба выражения равны $2\sin A\sin B\cos A\cos B - 2\cos^2 A\cos^2 B$. **18.6.** Оба выражения равны $2\sin^2 A\sin^2 B - 2\sin A\sin B\cos A\cos B$. **18.7.** Из формулы синуса суммы углов следует, что $\sin^2(60° \pm \alpha) = \frac{1}{4}\left(\sqrt{3}\cos\alpha \pm \sin\alpha\right)^2 = \frac{1}{4}\left(3\cos^2\alpha \pm 2\sqrt{3}\cos\alpha\sin\alpha + \sin^2\alpha\right)$. Поэтому $\sin^2(60° + \alpha) + \sin^2(60° - \alpha) = \frac{1}{2}(3\cos^2\alpha + \sin^2\alpha)$.

18.8. Пусть для определённости точка X находится на дуге AB и на дугу AX опирается центральный угол 2α. Тогда $AX = 2R\sin\alpha$, $BX = 2R\sin(60° - \alpha)$ и $CX = 2R\sin(60° + \alpha)$; здесь R — радиус описанной окружности. Поэтому согласно задаче 18.7 $AX^2 + BX^2 + CX^2 = 6R^2$. **18.9.** У треугольников ABC и A_1B_1C углы ACB и A_1CB_1 вертикальные, $A_1C = -AC\cos C$ и $B_1C = -BC\cos C$. **18.10.** Согласно примеру 2 на с. 70 и задаче 18.9 $A_1B_1 = \pm AB\cos C$, поэтому $\cos C = \pm\frac{1}{2}$. **18.11.** Треугольник AB_1C_1 подобен треугольнику ABC, и коэффициент подобия равен $\cos A$, поэтому $B_1C_1 = BC\cos A$. Аналогично $A_1C_1 = AC\cos B$. Кроме того, $\angle A_1C_1B_1 = 180° - 2\angle C$. Поэтому отношение площади треугольника $A_1B_1C_1$ к площади треугольника ABC равно $\frac{\cos A\cos B\sin 2C}{\sin C} = 2\cos A\cos B\cos C$. **18.12.** Пусть O — точка пересечения диагоналей выпуклого четырёхугольника $ABCD$. Выполните сначала гомотетию с коэффициентом $\cos AOB$ и центром O, а затем симметрию относительно биссектрисы угла AOB. При этом преобразовании вершины четырёхугольника переходят в основания перпендикуляров. **18.13.** Высота CH равна $AC\sin A = AC \times \frac{BC}{2R}$. **18.14.** Проведите высоту AH треугольника ABC и из точки H проведите перпендикуляры HM и HN к сторонам AB и AC. Точки M и N лежат на окружности с диаметром AH, поэтому $MN = AH\sin A$. Далее, $AH = AB\sin B = 2R\sin C\sin B$, где R — радиус окружности, описанной около треугольника ABC. Поэтому $MN = 2R\sin A\sin B\sin C$. **18.15.** Пусть R_1 и R_2 — радиусы окружностей, описанных около треугольников ABK и BCK. Тогда $AB = 2R_1\sin AKB$ и $BC = 2R_2\sin BKC$. Поэтому из равенств $AB = BC$ и $\sin AKB = \sin BKC$ следует, что $R_1 = R_2$. **18.16.** Точки E и F лежат на окружности с диаметром AD, поэтому длина отрезка EF равна $AD\sin A$. Таким образом, длина отрезка EF наименьшая, когда длина отрезка AD наименьшая, т. е. когда AD — высота треугольника ABC. **18.17.** Перпендикуляры, проведённые из точек A_1 и C_1 к прямой BD, равны $DA_1 \sin BDC = BC \sin BDC$ и $BC_1 \sin ABD = AD \sin ABD$ (рис. 230). Оба числа $BC \sin BDC$ и $AD \sin ABD$ равны диаметру окружности, описанной вокруг четырёхугольника. **18.18.** Высота треугольника ABC, проведённая к стороне BC, равна $b\sin C$. **18.19.** Площадь треугольника ABC равна $\frac{1}{2}ab\sin C$ и $\sin C = \frac{c}{2R}$.

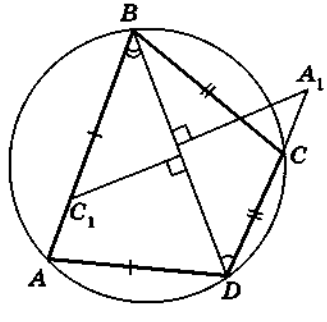


Рис. 230

18.20. Обозначим длину биссектрисы AD буквой l. Из равенства $S_{ABC} = S_{ABD} + S_{ACD}$ следует, что $bc \sin A = bl \sin\frac{A}{2} + cl \sin\frac{A}{2}$. Кроме того, $\sin A = 2\sin\frac{A}{2}\cos\frac{A}{2}$. **18.21.** Пусть l — длина биссектрисы CD, h — длина высоты CH. Тогда $cl \geqslant ch = 2S_{ABC} = 2S_{ACD} + 2S_{BCD} = bl \sin \frac{C}{2} + al \sin \frac{C}{2}$. **18.22.** Согласно задаче 18.13 высота треугольника равна $\frac{ab}{2R}$, где a и b — длины сторон, выходящих из той же вершины, что и высота, а R — радиус окружности, описанной около треугольника. Поэтому высоты треугольников MAB и MCD, проведённые из вершины M, равны $\frac{MA \cdot MB}{2R}$ и $\frac{MC \cdot MD}{2R}$, а высоты треугольников MBC и MAD, проведённые из вершины M, равны $\frac{MB \cdot MC}{2R}$ и $\frac{MA \cdot MD}{2R}$. **18.23.** Пусть смежные стороны параллелограмма равны a и b, а угол между ними равен α. Тогда квадраты диагоналей равны $a^2 + b^2 - 2ab\cos\alpha$ и $a^2 + b^2 + 2ab\cos\alpha$, поэтому сумма квадратов диагоналей равна $2a^2 + 2b^2$. **18.24.** Из формулы квадрата длины медианы (пример 4 на с. 70) следует, что $m_b^2 - m_a^2 = \frac{3(a^2 - b^2)}{4}$.

18.25. Сначала по теореме косинусов докажите, что косинус угла при основании равен $\frac{1}{8}$. Затем по свойству биссектрисы докажите, что биссектриса угла при основании делит сторону на отрезки, равные 4 и 16. Наконец, ещё раз применив теорему косинусов, найдите длину l биссектрисы: $l^2 = 4^2 + 5^2 - 2 \cdot 4 \cdot 5 \cdot \frac{1}{8} = 36$. **18.26.** Воспользуйтесь теоремой косинусов и тем, что $\cos A < \cos A_1$ (пример 1 на с. 69 для острых углов и равенство $\cos(180° - \alpha) = -\cos\alpha$ для тупых углов). **18.27.** Пусть M — точка пересечения медиан треугольника ABC. Медианы AA_1 и BB_1 перпендикулярны тогда и только тогда, когда угол AMB прямой, т. е. $AM^2 + BM^2 = c^2$. Воспользуйтесь выражением для квадрата медианы из примера 4 на с. 70: $AM^2 = \frac{4}{9} \cdot \frac{2b^2 + 2c^2 - a^2}{4}$ и $BM^2 = \frac{2a^2 + 2c^2 - b^2}{9}$. Поэтому равенство $AM^2 + BM^2 = c^2$ эквивалентно равенству $2b^2 + 2c^2 - a^2 + 2a^2 + 2c^2 - b^2 = 9c^2$. **18.28.** Пусть острый угол параллелограмма равен φ. Тогда $m^2n^2 = (a^2 + b^2 - 2ab\cos\varphi)(a^2 + b^2 + 2ab\cos\varphi) = (a^2 + b^2)^2 - 4a^2b^2\cos^2\varphi = a^4 + b^4 + 2a^2b^2(1 - 2\cos^2\varphi)$. Для острого угла φ равенство $2\cos^2\varphi = 1$ эквивалентно тому, что $\varphi = 45°$. **18.29.** Пусть отрезки, на которые диагонали делятся точкой пересечения, равны m_1, m_2, n_1, n_2 и $\angle AOB = \beta$ (рис. 231). Тогда $a^2 = m_1^2 + n_1^2 - 2m_1n_1\cos\beta$, $c^2 = m_2^2 + n_2^2 - 2m_2n_2\cos\beta$, $b^2 = m_2^2 + n_1^2 + 2m_2n_1\cos\beta$, $d^2 = m_1^2 + n_2^2 + 2m_1n_2\cos\beta$. Поэтому $a^2 + c^2 - b^2 - d^2 = -2(m_1 + m_2)(n_1 + n_2)\cos\beta = -2mn\cos\beta$. Кроме того, $\cos\beta = \pm\cos\alpha$. **18.30.** Введите следующие обозначения: $a_1 = BX$, $a_2 = XC$, $b = AC$, $c = AB$, $x = AX$. Выразите в треугольниках ABC и ABX косинус угла B по теореме косинусов и приравняйте полученные выражения:

$$\frac{c^2 + (a_1 + a_2)^2 - b^2}{2c(a_1 + a_2)} = \frac{c^2 + a_1^2 - x^2}{2ca_1}.$$

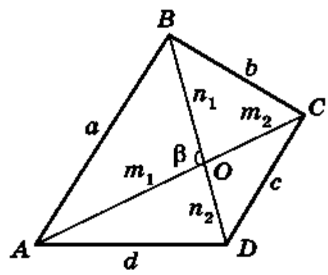


Рис. 231

Это равенство несложно преобразовать к требуемому равенству $c^2a_2 + b^2a_1 - x^2(a_1 + a_2) = (a_1 + a_2)a_1a_2$. **18.31.** Предположите, что точка O расположена внутри треугольника ABC и не покрыта кругами, т. е. отрезки OA, OB и OC больше 1. Один из углов AOB, BOC и COA не меньше 120°. Пусть для определённости $\alpha = \angle AOB \geqslant 120°$. Тогда $AB^2 = AO^2 + BO^2 - 2AO \cdot BO\cos\alpha > 1 + 1 + 1 = 3$.

18.32. Пусть $OA = x$ и $\angle A = 2\alpha$. Тогда $AM = \frac{AC}{2} = \frac{AH}{2\cos 2\alpha} = \frac{x\cos\alpha}{2\cos 2\alpha}$.

Примените теорему косинусов к треугольнику AOM:

$$4x^2 = x^2 + \left(\frac{x\cos\alpha}{2\cos 2\alpha}\right)^2 - 2x\frac{x\cos\alpha}{2\cos 2\alpha}\cos\alpha.$$

Сократите обе части на x^2 и воспользуйтесь тем, что $2\cos^2\alpha = \cos 2\alpha + 1$, получите квадратное уравнение $28\cos^2 2\alpha + 3\cos 2\alpha - 1 = 0$. Это уравнение имеет положительный корень $\frac{1}{7}$ и отрицательный корень $-\frac{1}{4}$. Нас интересует только положительный корень.

Глава 19. Площадь

19.1. Пусть $AB = A_1B_1$, $AC = A_1C_1$ и $\angle A + \angle A_1 = 180°$. Совместите стороны AB и A_1B_1 так, чтобы точки C и C_1 лежали по разные стороны от прямой AB (рис. 232). Тогда высоты треугольников ABC и $A_1B_1C_1$, проведённые к сторонам AB и A_1B_1, совпадут. **19.2.** Пусть M — точка пересечения медиан треугольника ABC, C_1 — середина стороны AB. У треугольников AMC_1 и BMC_1 равны стороны AC_1 и BC_1 и равны высоты, проведённые к этим сторонам. **19.3.** Из равенства площадей треугольников ABP и ACP следует, что прямая AP равноудалена от точек B и C. Такая прямая либо параллельна отрезку BC, либо проходит через его середину. **19.4.** Прямые BC и AD параллельны, поэтому треугольники ABC и DBC равновелики. Прямые CD и BE параллельны, поэтому треугольники BCD и ECD равновелики. **19.5.** Из равенства площадей треугольников AOB_1 и AOC_1 с общим основанием AO следует, что высоты, проведённые к этому основанию, равны. Поэтому из равенства углов OAB_1 и OAC_1 следует, что $AB_1 = AC_1$. По свойству биссектрисы треугольника $AB_1 = \frac{bc}{a+c}$ и $AC_1 = \frac{bc}{a+b}$, где $a = BC$, $b = CA$ и $c = AB$. Следовательно, $b = c$. **19.6.** Если углы A и A_1 треугольников ABC и $A_1B_1C_1$ равны, то их высоты, проведённые к сторонам AB и A_1B_1, пропорциональны сторонам AC и A_1C_1. **19.7.** Воспользуйтесь задачами 19.1 и 19.6. **19.8.** Отношение произведения площадей треугольников AOB и COD к произведению площадей треугольников BOC и AOD равно отношению произведения $AO \cdot BO \cdot CO \cdot DO$ к произведению $BO \cdot CO \cdot AO \cdot DO$. **19.9.** **Первый способ.** Воспользуйтесь тем, что

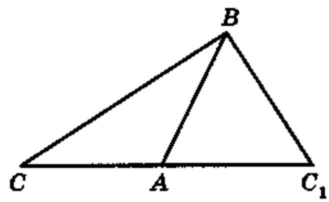


Рис. 232

$$\frac{S_{AOB}}{S_{AOD}} = \frac{AO \cdot BO}{AO \cdot DO} = \frac{BO}{DO} = \frac{OC}{AO} = \frac{BO \cdot OC}{AO \cdot BO} = \frac{S_{BOC}}{S_{AOB}}.$$

Второй способ. Воспользуйтесь задачей 19.8 и примером 1 на с. 74. **19.10.** Согласно свойству биссектрисы $AC_1 : AB = b : (a + b)$ и

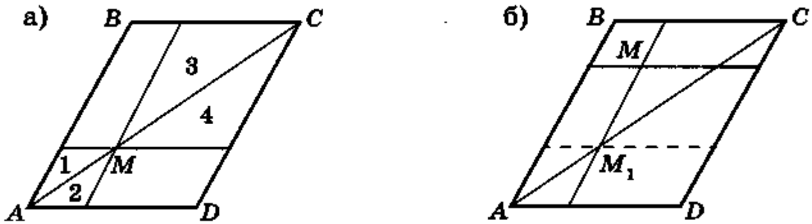


Рис. 233

$AB_1 : AC = c : (a + c)$. Поэтому отношение площади треугольника AB_1C_1 к площади треугольника ABC равно $\frac{bc}{(a+b)(a+c)}$. **19.11.** Пусть точка M лежит на диагонали AC. Тогда равны площади треугольников 1 и 2, 3 и 4 (рис. 233, *а*); площади треугольников ABC и ADC также равны. Пусть точка M не лежит на диагонали AC. Тогда можно рассмотреть точку M_1, в которой прямая, проходящая через точку M параллельно прямой AB, пересекает диагональ AC, и сравнить площади параллелограммов с вершинами B и D для точек M и M_1 (рис. 233, *б*). **19.12.** Проведите через вершины треугольника прямые, параллельные данному отрезку, и примите за основания параллелограммов их стороны, параллельные данному отрезку. Высоты параллелограммов, проведённые к этим основаниям, равны попарным расстояниям между проведёнными прямыми (рис. 234). **19.13.** Пусть отмеченные точки делят стороны параллелограмма так, как показано на рисунке 235. Тогда $x_1y_1 + (1 - x_1)y_2 + x_2(1 - y_1) + (1 - x_2)(1 - y_2) = 1$, т. е. $(x_1 - x_2)(y_1 - y_2) = 0$. **19.14.** Сторона прямоугольника отрезает от квадрата прямоугольный треугольник, отношение катетов которого равно $3 : 4$. Поэтому если сторона квадрата равна $4x$, то стороны прямоугольника равны $\frac{4x}{5}$ и $5x + \frac{3x}{5}$. **19.15.** Сначала докажите, что отношения длин отрезков такие, как показано на рисунке 236, а затем докажите, что площадь треугольника APB со-

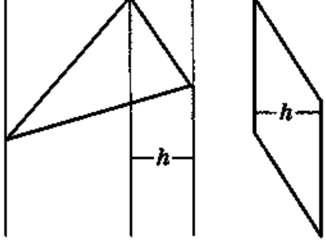


Рис. 234

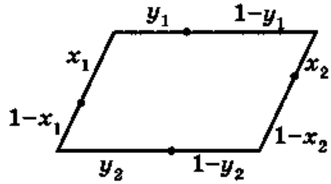


Рис. 235

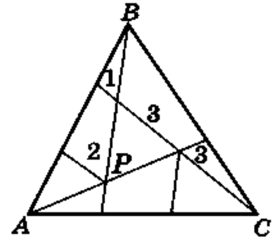


Рис. 236

ставляет $\frac{2}{7}$ от площади треугольника ABC. **19.16.** а) Площади треугольников ABC и DBC равны, поэтому точки A и D равноудалены от прямой BC. б) Согласно а) диагонали пятнугольника параллельны его сторонам. Пусть O — точка пересечения диагоналей AC и BD, $S_{AOB} = x$. Пятиугольник $ABCDE$ можно разрезать на параллелограмм $AODE$ и треугольники AOB и BCD, поэтому его площадь равна $3S + x$. Ясно, что $S_{AOB} : S_{BOC} = AO : OC = S_{AOD} : S_{COD}$, т. е. $x : (S - x) = S : x$. Поэтому $x = \frac{\sqrt{5} - 1}{2}S$. **19.17.** Расстояние от точки M до прямой CD равно полусумме расстояний от точек A и B до этой прямой. **19.18.** Вычтите из обеих частей равенства, полученного в задаче 19.17, сумму площадей треугольников DKN и CNL. **19.19.** Треугольники AEC и CBD подобны, и отношение их высот, проведённых из вершин E и B, равно $AC : CD$. **19.20.** Площадь четырёхугольника $KECF$ меньше площади треугольника BFC, а площадь этого треугольника равна четверти площади квадрата. Площадь треугольника AKF больше половины площади треугольника ABF, поскольку $FK > KB$, а площадь треугольника AKF равна половине площади квадрата. **19.21.** Пусть $AP : PB = x : (1 - x)$, а площадь треугольника ABC равна 1. Тогда площади треугольников AMP и BNP равны $(1 - x)x^2$ и $(1 - x)^2x$, а площадь треугольника RCQ равна $x(1 - x)$. **19.22.** Рассмотрите равносторонний треугольник и треугольник с углом, близким к 180°. **19.23.** Рассмотрите равнобедренный треугольник, основание которого мало по сравнению с боковой стороной. **19.24.** Возьмите прямоугольник, отношение смежных сторон которого велико, и рассмотрите один из треугольников, на которые его разделяют диагонали. **19.25.** Воспользуйтесь выражением для высоты треугольника, полученным в задаче 16.3. **19.26.** Воспользуйтесь формулой Герона. **19.27.** При увеличении чисел a, b и c на 1 каждое из чисел $p = \frac{a + b + c}{2}$, $p - a$, $p - b$ и $p - c$ увеличивается. **19.28.** Пусть $BC = a$ и $AC = b$. Тогда перпендикуляр, проведённый из точки B к прямой AC, не превосходит a. Этот перпендикуляр равен a в случае, когда угол C треугольника ABC прямой. **19.29.** Зафиксируйте точки B и C. Тогда точка A расположена на одной из двух дуг окружностей с общей хордой BC (рис. 237). Серединный перпендикуляр к отрезку BC пересекает эти дуги в двух точках, касательные к окружности в этих точках параллельны прямой BC. Высота треугольника ABC наибольшая, когда A — одна из этих точек. **19.30.** Проведите через вершины четырёхугольника прямые, параллельные его диагоналям. Эти прямые ограничивают параллелограмм, площадь которого вдвое больше площади четырёхугольника (рис. 238). Стороны этого параллелограмма равны a и b, поэтому его наибольшая площадь равна ab. **19.31.** Сначала постройте параллелограмм, стороны которого параллельны сторонам данного угла, а диагонали пересекаются в данной точке (рис. 239). Диагональ этого параллелограмма отсекает треугольник наименьшей площади. Действительно, если через данную точку провести другую прямую, то она отсекает треугольник большей площади: приращение площади равно площади треугольника, закрашенного на рисунке 239. **19.32.** Средние линии равностороннего треугольника разрезают его на четыре равных треугольника. Из трёх треугольников, закрашенных на рисунке 240, можно сложить один из этих треугольников. **19.33.** Разрезав диагональю четырёхугольник, длины последовательных сторон которого равны a, b, c и d, можно получить четырёхугольник той же площади, длины последовательных сторон которого равны b, a, c и d (рис. 241). Площадь полученного четырёхугольника не превосходит $\frac{ac+bd}{2}$. **19.34.** Из исходного параллелограмма можно составить три параллелограмма, равные среднему параллелограмму (рис. 242). **19.35.** Выразите стороны

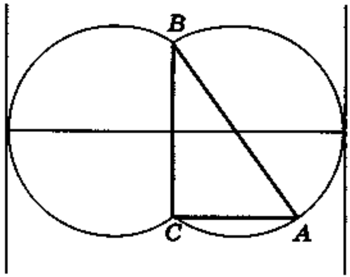


Рис. 237

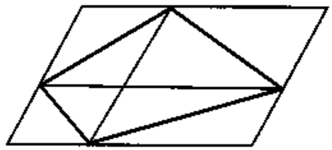


Рис. 238

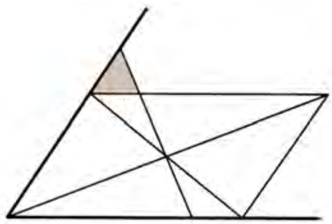


Рис. 239

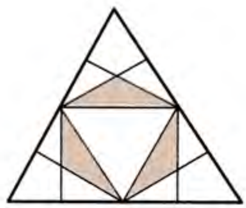
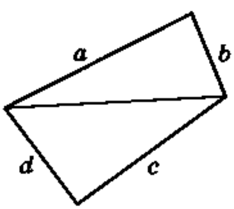


Рис. 240



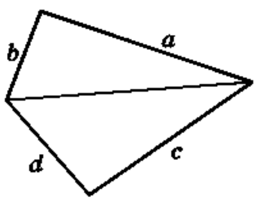


Рис. 241

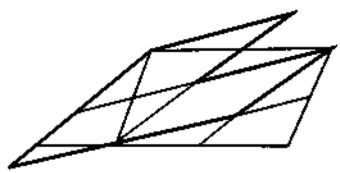


Рис. 242

треугольника через его площадь и высоты и воспользуйтесь неравенством треугольника. **19.36.** Пусть боковая сторона данного равнобедренного треугольника равна a, площадь равна S, а расстояния от точки основания треугольника до боковых сторон равны h_1 и h_2. Тогда $S=\frac{1}{2}a\left(h_1+h_2\right)$. **19.37.** Пусть сторона данного равностороннего треугольника равна a, площадь равна S, а расстояния от точки внутри треугольника до сторон равны h_1, h_2 и h_3. Тогда $S=\frac{1}{2}a\left(h_1+h_2+h_3\right)$.

19.38. Сначала докажите, что отношение $OA_1 : AA_1$ равно отношению площадей треугольников BOC и BAC. **19.39.** Пусть отрезок EF пересекает диагонали AC и BD в точках P и Q. Перпендикуляры, проведённые из двух вершин треугольника к продолжению медианы, равны, поэтому $CP : PA = S_{CPQ} : S_{APQ} = S_{BPQ} : S_{DPQ} = BQ : QD$.

Глава 20. Касательные и секущие

20.1. Пусть O — центр окружности, M — середина отрезка AD. Угол ACD прямой, поэтому $MA = MC$ и треугольники MAO и MCO равны по трём сторонам. Следовательно, $\angle MCO = \angle MAO = 90°$, т. е. прямая MC — касательная. **20.2.** Перпендикуляр, проведённый из середины отрезка O_1O_2 к прямой l, является средней линией трапеции, основания которой — радиусы окружностей. **20.3.** Пусть прямая l касается окружностей с центрами O_1 и O_2 в точках A_1 и A_2 соответственно. Перпендикуляр, проведённый из середины отрезка O_1O_2 к прямой l, можно представить в виде разности средних линий треугольников $A_1O_1A_2$ и $A_2O_2O_1$, равных половинам радиусов окружностей. **20.4.** Постройте прямоугольный треугольник, катеты которого равны $|R-r|$ и AB, а гипотенуза равна d. **20.5.** Постройте прямоугольный треугольник, катеты которого равны $R+r$ и AB, а гипотенуза равна d. **20.6.** Лучи AO и BO являются биссектрисами односторонних углов, сумма которых равна 180°. Поэтому $\angle BAO + \angle ABO = 90°$. **20.7.** Пусть стороны AB и AD касаются окружности в точках K и L. Тогда $\angle AOK = \angle AOL$. **20.8.** Точки B и X лежат на окружности с диаметром KO, поэтому $\angle XKO = \angle XBO$. Аналогично $\angle XLO = \angle XCO$. Треугольник BOC равнобедренный, поэтому $\angle XBO = \angle XCO$. Следовательно, треугольник KOL равнобедренный. Его высота OX является также медианой. **20.9.** Отложите на касательной, проходящей через точку A, отрезок AK_1, равный AK. Точки K_1 и L симметричны относительно серединного перпендикуляра к отрезку AB, поэтому $K_1L \parallel AB$ (рис. 243). Прямая AB проходит через середину отрезка KK_1, поэтому она проходит и через середину отрезка KL. **20.10.** Накрест лежащие углы, образованные при пересечении касательной и прямой BC секущей AC, равны: оба эти угла равны $\angle AMN$ или $180° - \angle AMN$. **20.11.** Угол OBC между касательной и хордой равен вписанному углу OAB. Из равенства $OA = OB$ следует, что $\angle OAB = \angle OBA$. Поэтому хорды BA и BC окружности S_1 образуют равные углы с диаметром. **20.12.** Точки A и B лежат по разные стороны от прямой KL. Для определённости можно считать, что точка K лежит внутри треугольника ALB. Тогда $\angle ABK = \angle KLB$ и $\angle BAK = \angle KLA$. **20.13.** По свойству угла между касательной и хордой $\angle ADP = \angle PAB$. Из параллельности хорд AB и CP следует, что $\angle PAB = \angle ABC$ (рассмотрите отдельно случаи, когда хорды AP и BC не пересекаются и когда они пересекаются). **20.14.** Пусть для определённости $OB < OC$. По теореме о внешнем угле треугольника $\angle APQ = \angle OAP + \angle AOP$ и $\angle OQA = \angle ACO + \angle COQ$. Углы OAP и ACO равны по теореме об угле между касательной и хордой, а углы AOP и COQ равны, потому что точки P и Q лежат на биссектрисе угла AOB. **20.15.** Пусть для определённости лучи OA и BC сонаправлены; M — точка пересечения прямых KL и OA. Тогда $\angle LOM = \angle LCB = \angle OKM$, поэтому треугольники KOM и OLM подобны. Следовательно, $OM : KM = LM : OM$, т. е. $OM^2 = KM \cdot LM$. Кроме того, по теореме о квадрате касательной $MA^2 = MK \cdot ML$. Поэтому $MA = OM$. **20.16.** Пусть прямая AE пересекает прямую OB в точке M. Тогда $\angle MAO = \angle ACE$ (угол между касательной и хордой) и $\angle ACE = \angle MOE$. Поэтому $\triangle AMO \backsim \triangle OME$ и $AM : MO = OM : ME$, т. е. $OM^2 = AM \cdot ME$. По теореме о квадрате касательной $MB^2 = MA \cdot ME$. Следовательно, $OM = MB$. **20.17.** Пусть искомое расстояние равно x и данная прямая и прямая ABпересекаются в точке O под углом α. Тогда $\sin\alpha = \frac{a}{AO} = \frac{b}{BO} = \frac{x}{MO}$, поэтому $\frac{ab}{AO \cdot BO} = \frac{x^2}{MO^2}$. По теореме о квадрате касательной $MO^2 = AO \cdot BO$, поэтому $x^2 = ab$. **20.18.** Выразите по теореме косинусов квадраты диагоналей параллелограмма через его стороны и один из углов и сложите эти равенства. В результате получите $AC^2 + BD^2 = 2(BC^2 + CD^2)$. По теореме о квадрате касательной $CB^2 = CA \cdot CO = \frac{1}{2}CA^2$, поэтому $DC^2 = \frac{1}{2}DB^2 = DB \cdot DO$. Это означает, что прямая DC

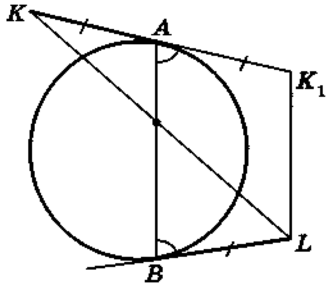


Рис. 243

касается окружности, проходящей через точки B, O и C. **20.19.** Пусть D — точка касания окружности со второй стороной угла, DH — перпендикуляр, проведённый к прямой AB. Тогда по теореме о квадрате касательной $OD^2 = ab$ и по теореме косинусов $AD^2 = ab + a^2 - 2a\sqrt{ab}\cos\alpha$. Треугольники OAD и ODB подобны, и коэффициент подобия равен $k = \frac{OB}{OD} = \sqrt{\frac{b}{a}}$. Далее, $\sin DBH = \frac{DH}{DB} = \frac{OD\sin\alpha}{DB} = \frac{\sqrt{ab}\sin\alpha}{kAD} = \frac{a\sin\alpha}{AD}$. Поэтому искомый радиус окружности равен $\frac{AD}{2\sin DBH} = \frac{AD^2}{2a\sin\alpha} = \frac{a + b - 2\sqrt{ab}\cos\alpha}{2\sin\alpha}$. **20.20.** По свойству биссектрисы треугольника $\frac{AP}{PB} = \frac{OA}{OB}$ и $\frac{AQ}{QC} = \frac{OA}{OC}$, поэтому $\frac{AP \cdot AQ}{PB \cdot QC} = \frac{OA^2}{OB \cdot OC}$. По теореме о квадрате касательной $OA^2 = OB \cdot OC$, согласно задаче 20.14 $AP = AQ$. Поэтому $AP^2 = PB \cdot QC$. **20.21.** Стороны треугольника равны $a + b$, $b + c$ и $c + a$. **20.22.** Пусть радиусы внутренних окружностей равны r_1 и r_2. Тогда стороны треугольника равны $r_1 + r_2$, $R - r_1$ и $R - r_2$. **20.23.** Проведите перпендикуляры AA_1, BB_1 и CC_1 к прямой l. Согласно примеру 4 на с. 81 $A_1C_1 = 2\sqrt{ac}$, $B_1C_1 = 2\sqrt{bc}$ и $A_1B_1 = 2\sqrt{ab}$. Поэтому из равенства $A_1C_1 + C_1B_1 = A_1B_1$ следует, что $\sqrt{ac} + \sqrt{bc} = \sqrt{ab}$. **20.24.** Пусть O_1, O_2 и O — центры окружностей, C — точка пересечения окружностей, лежащая на отрезке AB. Треугольники AOB, AO_1C и CO_2B равнобедренные, точки O_1 и O_2 лежат на отрезках OA и OB. Поэтому $OO_1 = O_2C = O_2B$. **20.25.** Пусть O — центр большей окружности, O_1 и O_2 — центры меньших окружностей, A и B — точки касания. Точки O_1 и O_2 лежат на сторонах AO и OB равнобедренного треугольника AOB и $AO_1 = OO_2$. Поэтому согласно задаче 17.10 прямые, проходящие через точки O_1 и O_2 параллельно OB и AO, пересекаются в некоторой точке C отрезка AB. Эта точка принадлежит каждой из первых двух окружностей. **20.26.** Пусть общая касательная, проходящая через точку C, пересекает отрезок AB в точке M. Тогда $MA = MC = MB$. Медиана CM треугольника ABC равна половине стороны AB, поэтому угол C прямой. **20.27.** Расстояние от середины отрезка AB до сторон угла равно полусумме радиусов окружностей. **20.28.** Пусть O — центр меньшей окружности. Прямые AK и OC перпендикулярны прямой BK, поэтому они параллельны. Следовательно,

$\angle KAC = \angle ACO = \angle OAC$. **20.29.** Треугольники AO_1A_1 и AO_2A_2 равнобедренные с равными углами при основании. **20.30.** Пусть O_A и O_B — центры построенных окружностей, проходящих через точку C и точки A и B соответственно. Точки A, O и O_A лежат на одной прямой, точки B, O и O_B тоже лежат на одной прямой. Треугольники AOB, AO_AC и BO_BC равнобедренные с равными углами при основаниях. Из этого следует, что $OO_B \parallel O_AC$ и $OO_A \parallel O_BC$, т. е. четырёхугольник OO_ACO_B — параллелограмм. Рассмотрим точку M, в которой пересекаются его диагонали. Прямая O_AO_B — серединный перпендикуляр к отрезку CD, поэтому $DM = MC = MO$. Точка D лежит на окружности с диаметром OC, поэтому $\angle ODC = 90°$. **20.31.** Пусть C — точка касания первой окружности и касательной, BD — отрезок касательной, H — точка касания окружностей (рис. 244). Угол AHC прямой (задача 20.26), поэтому AH — высота прямоугольного треугольника ABC, проведённая к гипотенузе. Следовательно, $AB^2 = BC \cdot BH$. По теореме о квадрате касательной $BD^2 = BC \cdot BH$. Поэтому $BD = AB$.

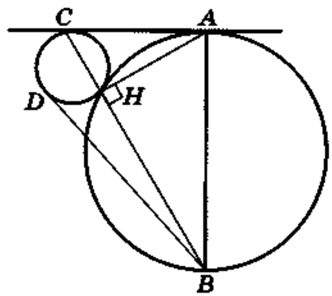


Рис. 244

Глава 21. Вписанная и описанная окружности

21.1. Согласно примеру 1 на с. 85 $2EM = AE + CE - AC$ и $2EN = BE + CE - BC$. Кроме того, $AC = BC$. **21.2.** Пусть окружности, вписанные в треугольники AEC и BEC, касаются отрезка CE в точках M и N. Тогда $2EM = AE + CE - AC$ и $2EN = BE + CE - BC$. Кроме того, $2AE = AB + AC - BC$ и $2BE = AB + BC - AC$. Поэтому $EM = EN$. **21.3.** Пусть эти окружности касаются стороны AC в точках M и N. Тогда $2AM = AB + AC - BC$ и $2AN = AD + AC - CD$. **21.4.** Радиус окружности, касающейся сторон прямого угла, равен отрезку касательной, проведённой из вершины прямого угла. **21.5.** Пусть углы треугольника ABC равны 2α, 2β и 2γ. Треугольники AB_1C_1 и A_1BC_1 равнобедренные, поэтому углы при их основаниях равны $90° - \alpha$ и $90° - \beta$, а угол $B_1C_1A_1$ равен $\alpha + \beta < \alpha + \beta + \gamma = 90°$. **21.6.** Пусть $a = AD > BC = c$, $AB = CD = b$ и $AC = BC = d$. Проведите высоту BH и рассмотрите точки K и L, в которых вписанные окружности касаются оснований BC и AD. Тогда $2AH = a - c$, $2AL = a + b - d$ и $2BK = b + c - d$, поэтому $AL - AH = BK$. **21.7.** Пусть угол при основании AB равнобедренного треугольника ABC равен α и $AB = 2a$.

Тогда радиус окружности, вписанной в треугольник, равен $a\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}$. Если ортоцентр H лежит на этой окружности, то $\angle BAH = 90° - \alpha$, поэтому диаметр окружности равен $a\operatorname{ctg}\alpha$. Таким образом, $\operatorname{ctg}\alpha = 2\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}$. Выразите обе части этого уравнения через $\sin\frac{\alpha}{2}$ и $\cos\frac{\alpha}{2}$. После сокращений и замены $\cos^2\frac{\alpha}{2}$ на $1-\sin^2\frac{\alpha}{2}$ находим: $\sin^2\frac{\alpha}{2} = \frac{1}{6}$, поэтому $\cos\alpha = \frac{2}{3}$. **21.8.** Пусть биссектриса угла C пересекает окружность в точке C_1. Угол между хордами A_1B_1 и CC_1 равен полусумме дуг A_1C и C_1AB_1. На дугу A_1C опирается вписанный угол, равный половине угла A, а на дугу C_1AB_1 опираются вписанные углы, равные половинам углов B и C. **21.9.** Пусть углы A и B равны 2α и 2β. Тогда $\angle OBI = \angle OIB = \alpha + \beta$. **21.10.** Пусть угол C равен 2γ. Тогда $\angle AOB = 2\gamma$ и $\angle OBI_a = \gamma$, поэтому $\angle OBI_a = \angle OI_aB = \gamma$. **21.11.** Пусть для определённости точка E лежит на продолжении стороны BC за точку C. Тогда углы A и D треугольника ADE равны $\angle B + \frac{1}{2}\angle A$. **21.12.** Согласно примеру 2 на с. 70 $\angle CA_1B_1 = \angle A$. Кроме того, $\angle OCB = 90° - \angle A$. **21.13.** Из равенств $\angle PLB = \angle C$ и $\angle ALB = \angle C + \frac{1}{2}\angle B$ следует, что $\angle ALP = \frac{1}{2}\angle B$, поэтому угол между прямой AC и хордой PL равен вписанному углу, опирающемуся на эту хорду. **21.14.** Пусть прямая BD пересекает описанную окружность в точке E. Тогда треугольник DEC равнобедренный, и серединный перпендикуляр к его основанию DC делит угол BEC пополам. **21.15.** Пусть O — центр окружности, описанной около треугольника ABC, E — точка пересечения луча AD и описанной окружности. Тогда $\angle MAD = \angle DAH = \angle MED = \angle OAD$, поэтому точки M и O совпадают. **21.16.** В любом треугольнике ABC биссектриса AD расположена внутри угла между медианой AM и высотой AH. Действительно, луч AD пересекает окружность, описанную около треугольника ABC, в середине E дуги BC и $ME \parallel AH$. Следовательно, биссектриса делит угол между медианой и высотой пополам, поэтому согласно задаче 21.15 угол, из которого выходят биссектриса, медиана и высота, прямой. Медиана, выходящая из вершины прямого угла, делит треугольник на два равнобедренных треугольника. **21.17.** Сложите равенства $\smile C_1A + \smile A_1C = 2(180° - \angle APC) = 240° - 2\angle B$ и $\smile AB_1 + \smile BA_1 = 240° - 2\angle C$

и вычтите из них равенство $\smile BA_1 + \smile A_1C = 2\angle A$. В результате получите $\smile C_1B_1 = \smile C_1A + \smile AB_1 = 480° - 2(\angle A + \angle B + \angle C) = 120°$. **21.18.** Пусть O — точка пересечения диагоналей AC и BD. Тогда $MO \cdot OC = BO \cdot OD$. Поэтому из равенств $OC = OA$ и $BO = OD$ следуют равенства $MO \cdot OA = BO^2$ и $MO \cdot OA = DO^2$. Эти равенства означают, что прямая OB касается окружности, описанной около треугольника ABM, и прямая OD касается окружности, описанной около треугольника ADM. **21.19.** Пусть остроугольный треугольник ABC расположен внутри окружности S. Постройте описанную окружность S_1 треугольника ABC. Треугольник ABC остроугольный, поэтому градусная мера дуги окружности S_1, лежащей внутри S, больше 180°. На этой дуге можно выбрать диаметрально противоположные точки, т. е. внутри окружности S содержится диаметр окружности S_1. Треугольник ABC с тупым углом A расположен внутри окружности, построенной на стороне BC как на диаметре. Радиус этой окружности равен $\frac{BC}{2}$, а радиус окружности, описанной около треугольника, равен $\frac{BC}{2\sin A}$. **21.20.** Пусть A_1, B_1 и C_1 — центры данных окружностей. Тогда $A_1B_1 = A_1C + CB_1$, $B_1C_1 = B_1A + AC_1$ и $A_1C_1 = A_1B + BC_1$, поэтому $A_1B = \frac{1}{2}(A_1B_1 + A_1C_1 - B_1C_1)$, т. е. B — точка касания окружности, вписанной в треугольник $A_1B_1C_1$, со стороной A_1C_1. **21.21.** Согласно задаче 21.20 эти касательные пересекаются в центре окружности, описанной около треугольника ABC. **21.22.** Центры трёх данных окружностей — вершины прямоугольного треугольника с катетами 3 и 4 и гипотенузой 5. Окружность, проходящая через точки касания, — это окружность, вписанная в этот треугольник. **21.23.** Точка пересечения биссектрисы угла A треугольника ABC и биссектрис внешних углов с вершинами B и C равноудалена от прямых, содержащих стороны треугольника. **21.24.** Пусть длины касательных, проведённых из вершин A, B и C к вневписанной окружности, равны x, y и z. Тогда $x - y = AB$, $y + z = BC$ и $x - z = AC$. **21.25.** См. указание к задаче 21.24. **21.26.** Радиус окружности, касающейся сторон прямого угла, равен отрезку касательной, проведённой из вершины угла. **21.27.** Отрезки касательных, проведённых из вершины A треугольника ABC к вневписанной окружности, касающейся сторон угла A, равны полупериметру треугольника. **21.28.** Расстояния от этих двух точек касания до концов стороны вычислены в примере 1 на с. 85 и в задаче 21.24. **21.29.** Пусть K и L — точки касания со сторо-

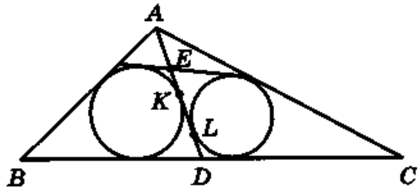


Рис. 245

ной AD окружностей, вписанных в треугольники ABD и ACD (рис. 245). Рассмотрите треугольник, образованный общими внешними касательными к окружностям и прямой AD. Одна из этих окружностей вписанная, а другая вневписанная, поэтому $EL = KD$ (задача 21.28); если общие внешние касательные к окружностям параллельны, то равенство $EL = KD$ очевидно. Следовательно, $EL = KD = \frac{1}{2}(BD + AD - AB)$. Кроме того, $AL = \frac{1}{2}(AD + AC - DC)$, поэтому $AE = AL - EL = \frac{1}{2}(AB + AC - BD - DC) = \frac{1}{2}(AB + AC - BC)$.

21.30. Воспользуйтесь результатами задач 21.9 и 21.10. **21.31.** Сначала постройте окружность, касающуюся сторон данного угла, в точках, расстояния от которых до вершины угла равны половине данного периметра. Затем через данную точку проведите касательную к этой окружности так, чтобы вершина угла и окружность лежали по разные стороны от касательной. **21.32.** Пусть I — центр окружности, вписанной в треугольник ABC, AA_1 — биссектриса треугольника. По свойству биссектрисы $AI : IA_1 = AB : BA_1$ и $BA_1 = \frac{AB \cdot BC}{AB + AC}$. Поэтому $AI : IA_1 = (AB + AC) : BC > 1$. **21.33.** Пусть I — середина дуги окружности S, лежащей внутри треугольника ABC. Тогда $\angle CBI = \angle BCI$ и $\angle BCI = \angle ABI$. Поэтому BI — биссектриса угла B. **21.34.** Внешний угол CID треугольника AIC равен $\frac{1}{2}\angle A + \frac{1}{2}\angle C$ и $\angle BIE = 90° - \frac{1}{2}\angle B$. **21.35.** Пусть AB — основание данного равнобедренного треугольника ABC, I — точка пересечения биссектрис. Тогда $3\angle BAI = \angle ACI = 90° - 2\angle BAI$. **21.36.** Пусть I — центр окружности, вписанной в треугольник ABC, O — центр окружности, описанной около него. Рассмотрим окружность радиуса IO с центром I и проведём хорды OM и ON, параллельные сторонам AB и AC. Пусть K — точка касания вписанной окружности со стороной AB, L — середина стороны AB. Тогда $IK \perp AB$ и $OL \perp AB$, поэтому $OM = 2KL = 2BL - 2BK = AB - (BC + AB - AC) = AC - BC = AE$.

Аналогично $ON = AD$. Поэтому $\triangle MON = \triangle EAD$. **21.37.** Воспользуйтесь тем, что $\angle IBC = \frac{1}{2}\angle B$ и $\angle I_aBC = 90° - \frac{1}{2}\angle B$. **21.38.** Углы этого треугольника равны $\frac{1}{2}\angle B + \frac{1}{2}\angle C$ и т. д. **21.39.** Луч AI_a — биссектриса угла A треугольника ABC, а лучи AI_b и AI_c — биссектрисы внешних углов с вершиной A. **21.40.** Воспользуйтесь задачей 21.39. **21.41.** Пусть I_a — середина дуги окружности S, лежащей вне треугольника ABC. Тогда $\angle CBI_a = \angle BCI_a$ и $\angle BCI_a = \angle DBI_a$, где D — точка на продолжении стороны AB за точку B. Поэтому BI_a — биссектриса внешнего угла с вершиной B. **21.42.** Рассмотрите четыре треугольника, одна вершина каждого из которых — центр окружности, а противолежащая сторона — высеченная хорда. Эти равнобедренные треугольники равны по трём сторонам, поэтому равны высоты, проведённые к основаниям. Таким образом, центр окружности равноудалён от сторон четырёхугольника. **21.43.** Пусть P — точка касания окружности с основанием AD. По теореме о квадрате касательной $AP^2 = AK \cdot AM$. Угол D треугольника ADM заключён между сторонами $AD = 2AP$ и $DM = AP$. Поэтому, выразив сторону AM по теореме косинусов, получим $\frac{AM}{AK} = \frac{AM^2}{AP^2} = 5 - 4\cos D$. Аналогично $\frac{BM}{BL} = 5 - 4\cos C = 5 + 4\cos D$. **21.44.** Пусть O_a, O_b, O_c и O_d — центры данных окружностей, вписанных в углы A, B, C и D, а O — общая точка этих окружностей. Точки O_a и O_b равноудалены от прямой AB, поэтому $O_aO_b \parallel AB$. Аналогично $O_bO_c \parallel BC$, поэтому $\angle ABC = \angle O_aO_bO_c$. Таким образом, углы четырёхугольника $ABCD$ равны углам четырёхугольника $O_aO_bO_cO_d$. Ясно также, что четырёхугольник $O_aO_bO_cO_d$ вписанный, поскольку его вершины равноудалены от точки O. **21.45.** Пусть O — центр вписанной в четырёхугольник $ABCD$ окружности, K, L, M и N — точки касания вписанной окружности со сторонами AB, BC, CD и DA. Тогда $\angle KOL = 180° - \angle B = \angle D$ и $\angle MON = 180° - \angle D = \angle B$. Пусть P — точка пересечения отрезков KM и LN. Тогда $\angle KPL = \frac{1}{2}(\smile KL + \smile MN) = 90°$. **21.46.** Пусть $\angle BAD = 2\alpha$ и $\angle CBA = 2\beta$; для определённости будем считать, что $\alpha \geqslant \beta$. Отметим на стороне CD точку E так, что $DE = DA$. Тогда $CE = CD - AD = CB$. Угол при вершине C равнобедренного треугольника BCE равен $180° - 2\alpha$, поэтому $\angle CBE = \alpha$. Аналогично $\angle DAE = \beta$. Биссектриса угла B пересекает CD в некоторой точке F. Так как $\angle FBA = \beta = \angle AED$, четырёхугольник $ABFE$ вписанный, а значит,

$\angle FAE = \angle FBE = \alpha - \beta$. Следовательно, $\angle FAD = \beta + (\alpha - \beta) = \alpha$, т. е. AF — биссектриса угла A. **21.47.** Пусть сумма противоположных углов четырёхугольника $ABCD$ равна 180°. Рассмотрим окружность, описанную около треугольника ABD. Она пересекает прямую AC в некоторой точке C_1, отличной от точки A. При этом $\angle BC_1D = 180° - \angle A = \angle C$. Если $AC_1 < AC$, то $\angle BC_1D > \angle C$, а если $AC_1 > AC$, то $\angle BC_1D < \angle C$, поэтому точка C_1 совпадает с точкой C. **21.48.** Пусть какие-то две смежные стороны данного выпуклого четырёхугольника не равны, например $AD > AB$. Тогда $CD > BC$. Отметим на сторонах AD и CD точки E и F так, что $AE = AB$ и $CF = BC$. Тогда $DE = DF$. Проведём биссектрисы углов A, C и D. Прямые, содержащие эти биссектрисы, являются серединными перпендикулярами к сторонам треугольника BEF, поэтому они пересекаются в одной точке. Эта точка равноудалена от всех сторон четырёхугольника. **21.49.** Отметьте на диагонали BD точку M так, что $\angle MCD = \angle BCA$ (рис. 246). Тогда $\triangle ABC \sim \triangle DMC$, так как углы BAC и BDC опираются на одну дугу. Поэтому $AB \cdot CD = AC \cdot MD$. Из равенства $\angle MCD = \angle BCA$ следует также равенство $\angle BCM = \angle ACD$. Поэтому $\triangle BCM \sim \triangle ACD$, так как углы CBD и CAD опираются на одну дугу. Следовательно, $BC \cdot AD = AC \cdot BM$. Таким образом, $AB \cdot CD + AD \cdot BC = AC \cdot MD + AC \cdot BM = AC \cdot BD$. **21.50.** По теореме Птолемея $AB \cdot CD + AC \cdot BD = AD \cdot BC$. Учитывая, что $CD = BD > \frac{BC}{2}$, получаем требуемое. **21.51.** Примените теорему Птолемея к четырёхугольнику $ABCP$. **21.52.** Пусть A_1, B_1 и C_1 — середины сторон $BC = a$, $CA = b$ и $AB = c$. По теореме Птолемея $AC_1 \cdot OB_1 + AB_1 \cdot OC_1 = AO \cdot B_1C_1$, где O — центр описанной окружности. Поэтому $cd_b + bd_c = aR$. Аналогично $ad_c + cd_a = bR$ и $ad_b + bd_a = cR$. Кроме того, $ad_a + bd_b + cd_c = 2S_{ABC} = (a + b + c)r$. Складывая все эти равенства и сокращая на $a + b + c$, получаем требуемое. **21.53.** Пусть P — вторая точка пересечения прямой CC_1 и вписанной окружности. Тогда $\angle AB_1C_1 = \angle B_1PC_1$, поэтому $\triangle CPB_1 \sim \triangle CB_1C_1$, а значит, $\frac{PB_1}{B_1C_1} = \frac{CP}{CB_1}$. Аналогично $\frac{CP}{CA_1} = \frac{PA_1}{A_1C_1}$. Учитывая, что $CA_1 = CB_1$, получаем $PB_1 \cdot A_1C_1 = PA_1 \cdot B_1C_1$. По теореме Птолемея $PB_1 \cdot A_1C_1 + PA_1 \cdot B_1C_1 =$

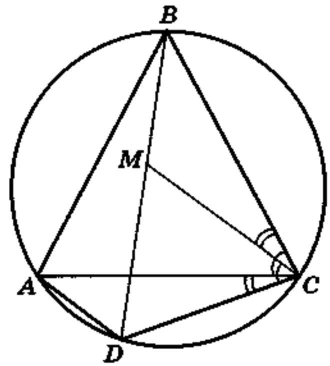


Рис. 246

$= PC_1 \cdot A_1B_1$, т. е. $2PB_1 \cdot A_1C_1 = 2PC_1 \cdot QA_1$. Кроме того, $\angle B_1PC_1 = \angle QA_1C_1$. Поэтому $\triangle B_1PC_1 \sim \triangle QA_1C_1$, а значит, $\angle BC_1P = \angle QC_1A_1$. **21.54.** Применяя теорему Птолемея к четырёхугольнику $APQR$, получаем $AP \cdot RQ + AR \cdot QP = AQ \cdot PR$. Так как $\angle ACB = \angle RAQ = \angle RPQ$ и $\angle RQP = 180° - \angle PAR = \angle ABC$, то $\triangle RQP \sim \triangle ABC$. Следовательно, $RQ : QP : PR = AB : BC : CA = AB : AD : AC$, поскольку $BC = AD$. **21.55.** Отложите на лучах AB, AC и AD отрезки AB_1, AC_1 и AD_1 длиной $\frac{1}{AB}$, $\frac{1}{AC}$ и $\frac{1}{AD}$. Тогда $AB : AC = AC_1 : AB_1$, поэтому $\triangle ABC \sim \triangle AC_1B_1$. Коэффициент подобия этих треугольников равен $\frac{1}{AB \cdot AC}$. Следовательно, $B_1C_1 = \frac{BC}{AB \cdot AC}$. Аналогично $C_1D_1 = \frac{CD}{AC \cdot AD}$ и $B_1D_1 = \frac{BD}{AB \cdot AD}$. Подставив эти выражения в неравенство треугольника $B_1D_1 \leqslant B_1C_1 + C_1D_1$ и умножив обе части на $AB \cdot AC \cdot AD$, получите требуемое.

Глава 22. Соотношения в треугольнике

22.1. Треугольник AB_1C_1 подобен треугольнику ABC, и коэффициент подобия равен $\cos A$ (пример 2 на с. 70). Поэтому отношение площади треугольника AB_1C_1 к площади треугольника ABC равно $\cos^2 A$. **22.2.** Пусть E, F, G и H — середины сторон AB, BC, CD и DA. Тогда сумма площадей треугольников AEH и CFG равна четверти суммы площадей треугольников ABD и CBD, т. е. равна $\frac{S}{4}$. **22.3.** Пусть площадь треугольника ABC равна S. Тогда $\sqrt{\frac{S_1}{S}} + \sqrt{\frac{S_2}{S}} = \frac{AD}{AB} + \frac{DB}{AB} = 1$. **22.4.** Пусть проведённые прямые пересекают сторону AB в точках M и N (рис. 247) и искомая площадь равна S. Тогда

$$\sqrt{\frac{S_1}{S}} + \sqrt{\frac{S_2}{S}} + \sqrt{\frac{S_3}{S}} = \frac{AM}{AB} + \frac{MN}{AB} + \frac{NB}{AB} = 1.$$

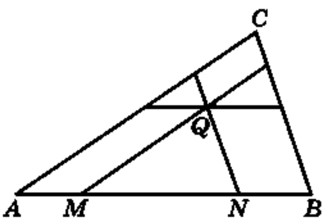


Рис. 247

22.5. Пусть искомая площадь равна x, M — точка пересечения медиан треугольника ABC; точка A_1 симметрична точке M относительно середины отрезка BC. Стороны треугольника CMA_1 относятся к медианам треугольника ABC как $2 : 3$. Поэтому площадь треугольника CMA_1 равна $\frac{4x}{9}$. С другой стороны, эта площадь равна $\frac{S}{3}$ (задача 19.2). **22.6.** Прямоугольные треугольники AHB_1 и BHA_1 подобны, поэтому $AH : HB_1 = BH : HA_1$. **22.7. Первый способ.** Пусть радиус окружности, описанной около треугольника ABC, равен R, а радиус окружности, описанной около треугольника ABH, равен R_1. Тогда $AB = 2R\sin C$ и $AB = 2R_1\sin AHB = 2R_1\sin C$, поэтому $R = R_1$. **Второй способ.** Пусть прямая AH пересекает окружность, описанную около треугольника ABC, в точке D. Тогда треугольники BCH и BCD равны по стороне и прилегающим к ней углам ($\angle HBC = 90° - \angle C = \angle CAD = \angle CBD$), а окружность, описанная около треугольника BCD, описана и около треугольника ABC. **22.8.** Радиусы окружностей, описанных около треугольников ABC и HBC, равны (задача 22.7), поэтому $2R\sin C = AB = CH = 2R\sin HBC$. Треугольник ABC остроугольный, поэтому $\angle C = \angle HBC$. Углы C и HBC — это острые углы прямоугольного треугольника, поэтому каждый из них равен 45°. **22.9.** Высоты треугольника ABH лежат на прямых AC, BC и HC. **22.10.** Если треугольник ABC остроугольный, то три других треугольника тупоугольные. Если, например, угол A тупой, то треугольник HBC остроугольный, а три других тупоугольные. **22.11.** Согласно задачам 22.9 и 22.10 достаточно доказать, что для остроугольного треугольника ABC радиус описанной около него окружности равен радиусам окружностей, описанных около HBC, AHC и ABH. См. задачу 22.7. **22.12.** Проведите через вершины треугольника ABC прямые, параллельные его противолежащим сторонам, и рассмотрите треугольник $A_1B_1C_1$ с вершинами в точках пересечения этих прямых. Точка H является центром окружности, описанной около треугольника $A_1B_1C_1$, а радиус этой окружности равен $2R$. Поэтому $4R^2 = B_1H^2 = B_1A^2 + AH^2 = BC^2 + AH^2$. **22.13.** Согласно задаче 22.12 $AH^2 = 4R^2 - BC^2 = \left(\frac{1}{\sin^2 A} - 1\right)BC^2 = BC^2\operatorname{ctg}^2 A$. **22.14.** Согласно задаче 22.13 $\operatorname{ctg} C = \pm 1$. **22.15.** Угол ACA_1 опирается на диаметр, поэтому он прямой и $BH \parallel A_1C$. Аналогично $CH \parallel A_1B$. Следовательно, четырёхугольник A_1BHC — параллелограмм. **22.16.** а) Пусть Q — середина отрезка CH, N — середина стороны AB. В треугольниках PQH и MNO стороны PQ и MN равны половине стороны AC и параллельны ей, а прилегающие к ним углы равны, поскольку $QH \parallel NO$ и $PH \parallel MO$. Поэтому $AH = 2PH = 2MO$. б) Стороны OM и PA четырёхугольника $MOAP$ равны и параллельны, поэтому он — параллелограмм, и $MP = OA$. **22.17.** Лучи AO и AH расположены внутри угла BAC, $\angle CAH = 90° - \angle C$ и $\angle BAO = 90° - \angle C$. **22.18.** Если угол A тупой, то луч AO и продолжение AG луча AH расположены внутри угла BAC, $\angle CAG = 90° - \angle C$ и $\angle BAO = 90° - \angle C$. Если, например, угол B тупой, то лучи AB и AC расположены внутри угла OAH, $\angle CAH = 90° - \angle C$ и $\angle BAO = 90° - \angle C$. **22.19.** Прямые BC и AD содержат высоты треугольника APB, поэтому прямая PQ, проходящая через точку Q их пересечения, перпендикулярна прямой AB. **22.20.** Согласно задаче 18.9 углы BA_1C_1 и CA_1B_1 равны (оба они равны углу A). Поэтому прямая AA_1, перпендикулярная прямой BC, делит пополам внешние углы треугольника $A_1B_1C_1$ с вершиной A_1. Далее, углы AC_1B_1 и BC_1A_1 равны (оба они равны углу C), поэтому луч C_1C, перпендикулярный прямой AB, является биссектрисой угла $A_1C_1B_1$. **22.21.** Согласно примеру 2 на с. 70 углы BA_1C_1 и CA_1B_1 равны углу A. Эти углы в сумме с углом $B_1A_1C_1$ составляют $180°$. **22.22.** Согласно примеру 2 на с. 70 углы BA_1C_1 и CA_1B_1 равны углу A. Эти углы в сумме составляют угол $B_1A_1C_1$. **22.23.** Если треугольник ABC остроугольный, то $\alpha = 180° - 2\angle A$ и т. д. Если угол C тупой, то $\alpha = 2\angle A$, $\beta = 2\angle B$ и $\gamma = 2\angle C - 180°$. **22.24.** См. задачу 18.11. **22.25.** См. задачу 22.1. **22.26.** Это следует из свойства ортотреугольника остроугольного треугольника, сформулированного в примере 3 на с. 93. **22.27.** Периметр ортотреугольника вдвое больше отрезка MN из задачи 18.14. **22.28.** Проведите из вершин треугольника перпендикуляры AA_2, BB_2 и CC_2 к прямой, на которой лежат точки A_1, B_1 и C_1. Тогда $BA_1 : CA_1 = BB_2 : CC_2$. **22.29.** Пусть прямая EF пересекает прямую AC в точке D. Согласно задаче 22.28 выполняется равенство $\frac{AD}{CD} \cdot \frac{CF}{HF} \cdot \frac{HE}{AE} = 1$. По свойству биссектрисы $HE : AE = CH : CA = BH : BC$. Оба угла BCE и BEC равны $90° - \frac{\angle B}{2}$, поэтому $BE = BC$. Следовательно, $CF : HF = BE : BH = BC : BH$. **22.30.** Обозначьте точку пересечения отрезков AA_1, BB_1 и CC_1 буквой O. Тогда $BA_1 : CA_1 = S_{ABO} : S_{ACO}$. **22.31.** Обозначьте точку пересечения прямых AA_1, BB_1 и CC_1 буквой O. Тогда $BA_1 : CA_1 = S_{ABO} : S_{ACO}$. **22.32.** Из параллельности прямых AA_1, BB_1 и CC_1 следует, что $\frac{CB_1}{AB_1} = \frac{CB}{BA_1}$ и $\frac{AC_1}{BC_1} = \frac{CA_1}{CB}$. **22.33.** Предположите, что $AP < AQ$. Тогда $PB > QB$, поэтому $AP : BP < AQ : BQ$. **22.34.** Рассмотрите точку O, в которой пересекаются отрезки AA_1 и BB_1, и проведите прямую CO. Эта прямая пересекает отрезок AB в некоторой точке C_2. Согласно задаче 22.30 выполняется равенство $\frac{BA_1}{CA_1} \cdot \frac{CB_1}{AB_1} \cdot \frac{AC_2}{BC_2} = 1$. Следовательно, $AC_1 : BC_1 = AC_2 : BC_2$. Точки C_1 и C_2 лежат на отрезке AB, поэтому согласно задаче 22.33 эти точки совпадают, т. е. отрезок CC_1 тоже проходит через точку O. **22.35.** Пусть окружность, вписанная в треугольник, касается сторон BC, CA и AB в точках A_1, B_1 и C_1. Воспользуйтесь задачей 22.34 и тем, что $AB_1 = AC_1$, $BA_1 = BC_1$ и $CA_1 = CB_1$. **22.36.** Воспользуйтесь задачами 22.34 и 21.24. **22.37.** Воспользуйтесь тем, что $BA_1 : CA_1 = CA_2 : BA_2$. **22.38.** По теореме синусов $\sin BAA_1 : \sin BA_1A = BA_1 : BA$ и $\sin CAA_1 : \sin CA_1A = CA_1 : CA$. Кроме того, $\sin BA_1A = \sin CA_1A$. Поэтому

$$\frac{\sin BAA_1}{\sin CAA_1} = \frac{BA_1}{CA_1} \cdot \frac{AC}{BC}.$$

22.39. Требуется доказать, что $\frac{\sin 30^\circ}{\sin 20^\circ} \cdot \frac{\sin 10^\circ}{\sin 70^\circ} \cdot \frac{\sin 40^\circ}{\sin 10^\circ} = 1$. Ясно, что $\sin 30^\circ \sin 40^\circ = \frac{1}{2} \sin 40^\circ = \sin 20^\circ \cos 20^\circ = \sin 20^\circ \sin 70^\circ$. **22.40.** Требуется доказать, что $\frac{\sin 20^\circ}{\sin 10^\circ} \cdot \frac{\sin 30^\circ}{\sin 40^\circ} \cdot \frac{\sin 30^\circ}{\sin 50^\circ} = 1$. Ясно, что $\sin 10^\circ \sin 40^\circ \sin 50^\circ = \sin 10^\circ \sin 40^\circ \cos 40^\circ = \frac{1}{2} \sin 10^\circ \sin 80^\circ = \frac{1}{4} \sin 20^\circ$.
22.41. Воспользуйтесь задачей 22.38 и тем, что $\sin BAA_1 : \sin CAA_1 = \sin CAA_2 : \sin BAA_2$. **22.42.** Для определённости считайте, что точки A_1 и B_1 лежат на продолжениях сторон. Если прямые AA_1 и BB_1 параллельны, то проведите через точку C параллельную им прямую. Если же эти прямые пересекаются в некоторой точке O, то проведите прямую CO. В обоих случаях проведённая прямая пересекает отрезок AB (а не его продолжение) в некоторой точке C_2. Согласно задаче 22.30 выполняется равенство $\frac{BA_1}{CA_1} \cdot \frac{CB_1}{AB_1} \cdot \frac{AC_2}{BC_2} = 1$. Следовательно, $AC_1 : BC_1 = AC_2 : BC_2$. Точки C_1 и C_2 лежат на отрезке AB, поэтому согласно задаче 22.33 эти точки совпадают, т. е. отрезок CC_1 тоже проходит через точку O. **22.43.** Если $AP : BP > 1$, то точка P лежит на продолжении отрезка AB за точку B и $\frac{AP}{BP} = \frac{AB + BP}{BP} = 1 + \frac{AB}{BP}$. Если $AP : BP < 1$, то точка P лежит на продолжении отрезка AB за точку A и $\frac{BP}{AP} = \frac{AB + AP}{AP} = 1 + \frac{AB}{AP}$. **22.44.** Предположите, что прямая A_1B_1 параллельна прямой AB. Тогда $AC_1 = BC_1$, поэтому точка C_1 — середина отрезка AB. Но тогда на сторонах треугольника лежат либо три точки, либо одна, что противоречит условию. Поэтому прямая A_1B_1 пересекает прямую AB в некоторой точке C_2. Из задачи 22.28 следует, что $AC_1 : BC_1 = AC_2 : BC_2$. Кроме того, точки C_1

и C_2 либо обе лежат на стороне AB, либо обе лежат на её продолжении. Воспользовавшись задачами 22.33 и 22.43, получите, что точки C_1 и C_2 совпадают. **22.45.** Воспользуйтесь задачей 22.44 и тем, что $BA_1 : CA_1 = BA : CA$ (задачи 17.34 и 17.35). **22.46.** а) Пусть для определённости $\angle B < \angle C$. Тогда $\angle DAE = \angle ADE = \angle B + \frac{\angle A}{2}$, поэтому $\angle CAE = \angle B$. Далее, $BE : AB = \sin BAE : \sin AEB$ и $AC : CE = \sin AEC : \sin CAE$. Углы AEB и AEC равны, поэтому $BE : CE = (AB \sin BAE) : (AC \sin CAE) = (AB \sin (A + B)) : (AC \sin B) = (AB \sin C) : (AC \sin B) = AB^2 : AC^2$. б) В задаче а) точка E лежит на продолжении стороны BC, поскольку $\angle ADC = \angle BAD + \angle B > \angle CAD$. Поэтому все три рассматриваемые точки лежат на продолжениях сторон, и можно воспользоваться результатом задачи 22.44.

Глава 23. Выпуклые и невыпуклые многоугольники

23.1. Искомая прямая изображена пунктиром на рисунке 248. Если прямая не проходит через вершины пятиконечной звезды, то три вершины звезды лежат по одну сторону от этой прямой и две из этих вершин соединены звеном. **23.2.** а) Возьмите одну из вершин. Вершину, с которой она не соединена звеном, можно выбрать тремя способами. После этого замкнутая ломаная проводится однозначно. б) У незамкнутой ломаной есть две концевые вершины. Две вершины из четырёх можно выбрать шестью способами. Возьмите одну из концевых вершин и соедините её с одной из двух оставшихся вершин. После этого незамкнутая ломаная строится однозначно. **23.3.** а) Возьмите одну вершину. Чтобы провести из неё звенья, нужно выбрать две вершины из четырёх. Это делается шестью способами. После этого есть два способа построить замкнутую ломаную. б) Две не концевые вершины ломаной из пяти выбираются десятью способами. Затем из них шестью способами проводятся звенья. После этого незамкнутая ломаная строится однозначно. **23.4.** См. рис. 249. **23.5.** См. рис. 250. Другое решение приведено

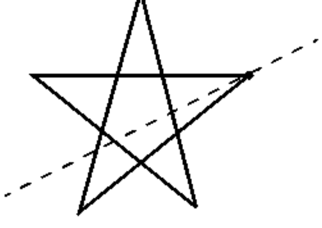


Рис. 248

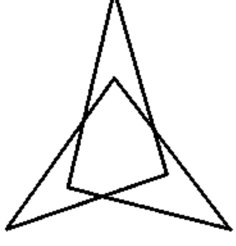


Рис. 249

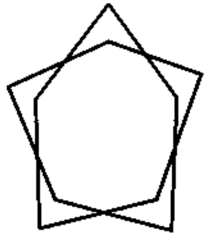


Рис. 250

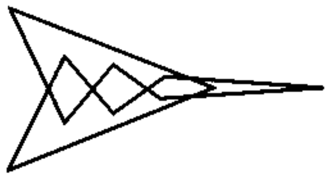


Рис. 251

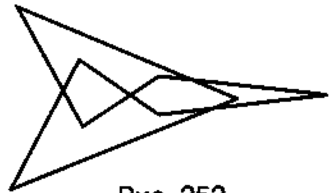


Рис. 252

на рисунке 251. **23.6.** Звенья ломаной разбиваются на пары, пересекающие друг друга. **23.7.** См. рис. 252. **23.8.** См. рис. 253. **23.9.** См. рис. 254. **23.10.** Если все углы выпуклого четырёхугольника острые, то сумма его углов меньше 360°. **23.11.** Если $\alpha > \beta + \gamma + \delta$ и $\alpha + \beta + \gamma + \delta = 360°$, то $\alpha > 180°$. **23.12.** Пусть диагонали четырёхугольника $ABCD$ пересекаются в точке P. Если диагонали перпендикулярны, то $AB^2 + CD^2 = AP^2 + BP^2 + CP^2 + DP^2 = AD^2 + BC^2$. Предположите теперь, что $AB^2 + CD^2 = AD^2 + BC^2$. Тогда для точек $M = B$ и $M = D$ величина $AM^2 - CM^2$ принимает одно и то же значение, поэтому (задача 16.10) эти точки лежат на прямой, перпендикулярной прямой AC. **23.13.** Пусть M и N — середины сторон AB и CD выпуклого четырёхугольника $ABCD$, E и F — точки пересечения диагоналей AC и BD с отрезком MN. Точки A и B удалены от прямой MN на одно и то же расстояние h_1, точки C и D удалены от прямой MN на расстояние h_2. Поэтому $AE : EC = h_1 : h_2 = BF : FD$. **23.14.** Для площади S выпуклого четырёхугольника выполняются неравенства $S \leqslant \frac{ab + cd}{2}$ и $S \leqslant \frac{ad + bc}{2}$. Если оба эти неравенства обращаются в равенства, то все углы четырёхугольника прямые. **23.15.** Для любой пары противоположных сторон выпуклого четырёхугольника сумма углов при одной стороне не меньше 180°. Поэтому для одной из вершин четырёхугольника сумма углов при обе-

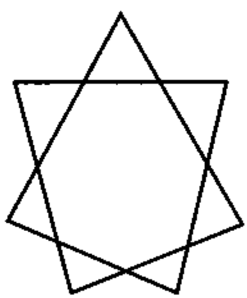


Рис. 253

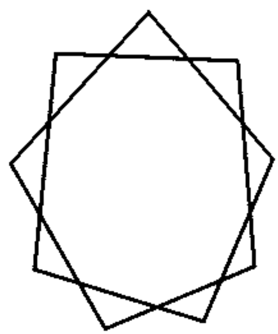


Рис. 254

их сторонах, выходящих из этой вершины, не меньше 180°. Из четырёхугольника можно вырезать параллелограмм, вершинами которого являются эта вершина и соседние с ней. **23.16.** Продолжив боковые стороны трапеции до пересечения, получим некоторый угол, содержащий трапецию. Трапеция лежит по одну сторону от каждой из сторон этого угла. Очевидно также, что трапеция лежит по одну сторону от каждого из оснований. **23.17.** Сначала, воспользовавшись свойством биссектрисы треугольника, докажите, что $AC : AD = BC : BD$. **23.18.** Пусть продолжения сторон AB, BC, CD и DA касаются окружности в точках K, L, M и N. Тогда $AB + BC = AK - BK + BL - CL = AK - CL$ и $AD + DC = AN - DN + DM - CM = AN - CM = AK - CL$. **23.19.** Пусть прямая MN, где M и N — середины сторон AB и CD выпуклого четырёхугольника $ABCD$, образует равные углы с диагоналями. Рассмотрим середину K стороны AD. Отрезки KM и KN параллельны диагоналям и равны их половинам. Поэтому треугольник MKN равнобедренный и диагонали равны. **23.20.** Взяв две хорды BA и BC, образующие равные углы с диаметром, можно построить треугольники ABD и CBD, у которых стороны AB и CB равны и углы A и C равны (рис. 255, *а*). Из этих треугольников можно сложить требуемый четырёхугольник $ABCD$ (рис. 255, *б*). **23.21.** Пусть диагонали четырёхугольника $ABCD$ пересекаются в точке O. Примените неравенство треугольника к треугольникам AOB и COD. **23.22.** Воспользуйтесь задачей 23.21. **23.23.** Отметьте на лучах AB и AC точки C_1 и B_1 так, что $AC_1 = AC$ и $AB_1 = AB$. Воспользуйтесь тем, что сумма сторон BB_1 и CC_1 четырёхугольника BB_1CC_1 меньше суммы его диагоналей. **23.24.** Пусть четырёхугольник $ABCD$ выпуклый, M — произвольная точка. Тогда $AM + MC \geqslant AC$ и $BM + MD \geqslant BD$. Если же O — точка пересечения диагоналей, то $AO + OC = AC$ и $BO + OD = BD$. **23.25.** Рассмотрите точку Q, в которой луч AO пересекает сторону четырёхугольника, и

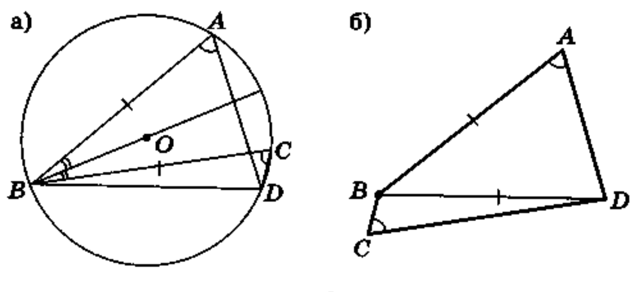


Рис. 255

запишите неравенства для $AO + OQ$ и для BO. **23.26.** Воспользуйтесь неравенством $AO + OB < AD + DC + CB$ из задачи 23.25. **23.27.** Пусть вершины C и D лежат по разные стороны от прямой AB. Стороны AB и CD не пересекаются, поэтому отрезок CD пересекает не отрезок AB, а его продолжение. Пусть для определённости он пересекает продолжение отрезка AB за точку B (рис. 256). Тогда точка B лежит внутри треугольника ACD, четырёхугольник $ABCD$ лежит по одну сторону от диагонали AC и по разные стороны от диагонали BD. **23.28.** Пусть невыпуклый четырёхугольник $ABCD$ лежит по одну сторону от диагонали AC и по разные стороны от диагонали BD. Тогда прямая BD пересекает отрезок AC в некоторой точке K (см. рис. 256). Если $KB < KD$, то точка B лежит внутри треугольника ADC, а если $KD < KB$, то точка D лежит внутри треугольника ABC. **23.29.** Воспользуйтесь тем, что суммы углов треугольников ABC и ABD равны 180°. **23.30.** См. рис. 257. **23.31.** См. рис. 258. **23.32.** Воспользуйтесь тем, что диагональ пятиугольника меньше суммы двух его сторон. Пусть диагонали AC и BE выпуклого пятиугольника $ABCDE$ пересекаются в точке M; воспользуйтесь тем, что $AB < AM + MB$. **23.33.** Угол DBE равен сумме углов ABE и CBD, поэтому на стороне ED можно выбрать точку P так, что $\angle EBP = \angle ABE = \angle AEB$ и $\angle DBP = \angle CBD = \angle CDB$. Тогда $AE \parallel BP$ и $CD \parallel BP$, поэтому $AE \parallel CD$. Кроме того, $AE = CD$, поэтому $ACDE$ — параллелограмм. Следовательно, $AC = ED$ и треугольник ABC равносторонний. **23.34.** Рассмотрите точку L, в которой пересекаются прямые AE и CD. Пусть градусные меры дуг BC, CD, DE и EA равны $2\alpha_1$, $2\alpha_2$, $2\beta_2$ и $2\beta_1$ (рис. 259). Тогда

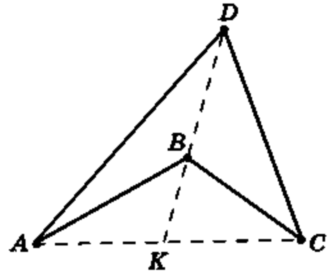


Рис. 256


Рис. 257

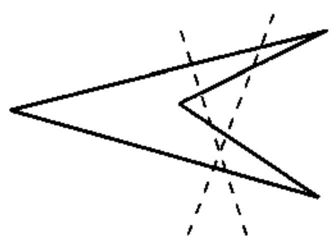


Рис. 258

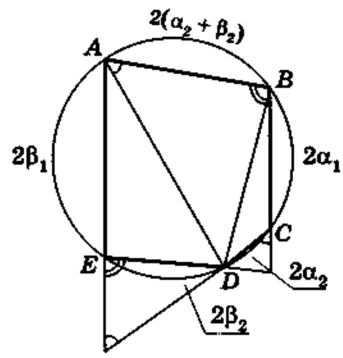


Рис. 259

$\angle DAB = 2\alpha_1 + 2\alpha_2$. Градусная мера дуги AB равна $2(\alpha_2 + \beta_2)$, поэтому $\angle DCK = \angle DLE = 2(\alpha_2 + \beta_2) + 2\alpha_1 - 2\beta_2 = \angle DAB$. Аналогично $\angle DEL = \angle DBA$. Следовательно, $\triangle DAB \sim \triangle DCK$. **23.35.** Из равенства площадей треугольников ABE и ABC следует, что $CE \parallel AB$. Остальные диагонали пятиугольника тоже параллельны его сторонам. Пусть P — точка пересечения отрезков BD и EC. Положим $x = S_{BPC}$. Ясно, что $S_{EPB} = S_{ABE} = 1$, поскольку $ABPE$ — параллелограмм. Поэтому $S_{ABCDE} = S_{ABE} + S_{EPB} + S_{EDC} + S_{BPC} = 3 + x$. Из равенства отношений $S_{BPC} : S_{DPC} = BP : DP = S_{EPB} : S_{EPD}$ получаем квадратное уравнение $x : (1 - x) = 1 : x$ и находим его положительный корень $x = \dfrac{\sqrt{5} - 1}{2}$.

23.36. Если выпуклый многоугольник разрезан на параллелограммы, то для каждой его стороны найдётся ещё ровно одна параллельная ей сторона. **23.37.** На рисунке 260 один из требуемых пятиугольников изображён чёрной линией, а другой синей. **23.38.** Пусть радиус описанной окружности равен R. Выразив площадь треугольника ABE двумя способами, получим $\dfrac{AE \cdot BE \cdot AB}{4R} = \dfrac{a \cdot AB}{2}$, т. е. $a = \dfrac{AE \cdot BE}{2R}$.

Запишите аналогичные выражения для расстояний до прямых BC, CD и AD. **23.39.** Сумма углов полученных треугольников равна сумме углов многоугольника. **23.40.** См. рис. 261. **23.41.** а) См. рис. 262. б) Предположим, что прямая не проходит через вершины многоугольника и пересекает все его стороны. Тогда стороны многоугольника можно разбить на

Рис. 260

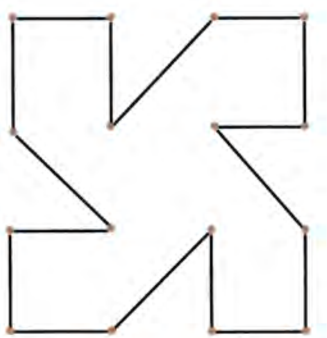


Рис. 261

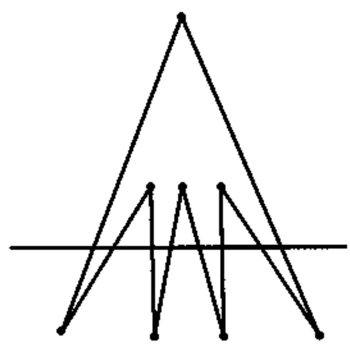


Рис. 262

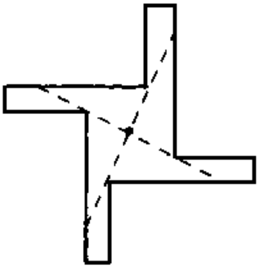


Рис. 263

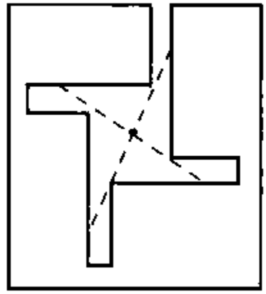


Рис. 264

пары, выходящие из вершин, лежащих по одну сторону от прямой. 23.42. См. рис. 263. 23.43. См. рис. 264. 23.44. Проведите через вершины A, C и E прямые, параллельные сторонам BC, DE и FA. Эти прямые образуют равносторонний треугольник, стороны которого равны $|AB - DE|$, $|BC - FE|$ и $|CD - AF|$. 23.45. Каждый угол многоугольника в сумме с внешним углом даёт 180°. Поэтому сумма всех углов и всех внешних углов выпуклого n-угольника равна $n \cdot 180°$. 23.46. Сумма внешних углов выпуклого многоугольника равна 360°. Вклад каждого острого угла многоугольника в эту сумму больше 90°.

Глава 24. Движения

24.1. Пусть перпендикуляры к сторонам треугольника, проведённые через точки A_1, B_1 и C_1, пересекаются в точке M. Обозначьте центр окружности буквой O. Перпендикуляры к стороне BC, проведённые через точки A_1 и A_2, симметричны относительно точки O. Поэтому перпендикуляры к сторонам, проведённые через точки A_2, B_2 и C_2, пересекаются в точке, симметричной точке M относительно точки O. 24.2. Пусть P, Q, R и S — середины сторон AB, BC, CD и DA четырёхугольника $ABCD$, M — точка пересечения отрезков PR и QS. Четырёхугольник $PQRS$ — параллелограмм (задача 13.8), поэтому точка M — общая середина отрезков PR и QS. Обозначьте центр окружности буквой O. Пусть точка O_1 симметрична точке O относительно точки M. Тогда четырёхугольник PO_1RO — параллелограмм, поэтому $PO_1 \perp CD$. Аналогичные рассуждения показывают, что O_1 — искомая точка. 24.3. Окружности S_1 и S_2 симметричны относительно точки A. Угол OAB прямой, поскольку OB — диаметр окружности S_1. Поэтому точка, симметричная точке B относительно точки A, лежит на окружности S. Она лежит также и на окружности S_2. 24.4. Центр симметрии выпуклого многоугольника не мо-

жет быть его вершиной, поэтому вершины выпуклого многоугольника, имеющего центр симметрии, разбиваются на пары. **24.5.** Предположите, что выпуклый многоугольник имеет два центра симметрии; обозначьте их O_1 и O_2. Рассмотрите ту часть многоугольника, которая лежит на прямой O_1O_2. Эта фигура является отрезком и имеет центры симметрии O_1 и O_2. Но у отрезка только один центр симметрии — его середина. **24.6.** Первый игрок кладёт монету в центр стола, а затем кладёт монеты симметрично монетам второго игрока относительно центра стола. Первый игрок всегда может сделать очередной ход. Ясно также, что игра завершится за конечное число ходов. **24.7.** Пусть точка E симметрична точке D относительно точки P. Если $S_{PCD} = \frac{1}{2} S_{ABCD}$, то $S_{PCE} = S_{PCD} = S_{PBC} + S_{PBE}$, поэтому точка B лежит на отрезке EC. Ясно также, что $EB \parallel AD$. **24.8.** Возьмём на ломаной точки A и B, делящие её периметр пополам. Тогда $AB < 2$. Докажем, что все точки ломаной лежат внутри круга радиуса 1 с центром в точке O — середине отрезка AB. Пусть M — произвольная точка ломаной, а точка M_1 симметрична ей относительно точки O. Тогда $MO = \frac{M_1M}{2} < \frac{M_1A + AM}{2} = \frac{BM + AM}{2} < 1$, так как $BM + AM$ не превосходит половины длины ломаной. **24.9.** Точка C_1, симметричная точке C относительно гипотенузы AB, не может лежать на продолжении средней линии, параллельной гипотенузе. Пусть для определённости она лежит на прямой MN, где M и N — середины сторон AB и BC (рис. 265). Тогда четырёхугольник $ACMC_1$ — ромб, $2\alpha + \beta = 90°$ и $\alpha + 2\beta = 90°$. **24.10.** Пусть прямые AM и BM пересекают окружность в точках B_1 и A_1; эти точки симметричны точкам B и A относительно диаметра. Угол AOM равен полусумме градусной меры дуги AB и равной ей дуги A_1B_1, поэтому он равен градусной мере дуги AB. Центральный угол AOB тоже равен градусной мере дуги AB. **24.11.** Пусть точка B_1 симметрична точке B относительно прямой AE. Тогда точки B, H, B_1 и E лежат на одной окружности. Поэтому $\angle EHC = \angle EBB_1 = 45°$. **24.12.** Воспользовавшись результатом задачи 21.11, докажите, что указанная прямая симметрична прямой BC относительно прямой AD. **24.13.** Пусть точки C_1 и C_2 симметричны точке C относительно прямых AB

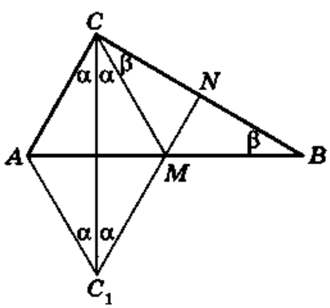


Рис. 265

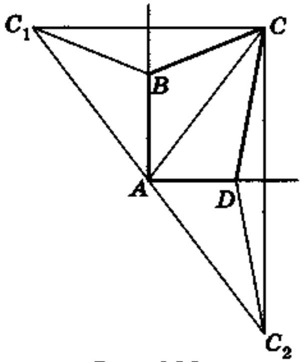


Рис. 266

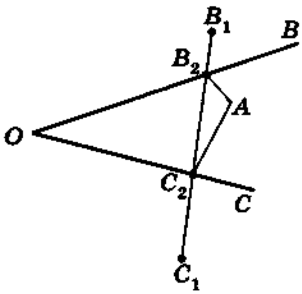


Рис. 267

и AD (рис. 266). Тогда $BC + CD + DB = BC_1 + C_2D + DB > C_1C_2 = 2AC$. **24.14.** Воспользуйтесь равенствами $\angle B_1OA = 2\angle BOA$ и $\angle AOC_1 = 2\angle AOC$. **24.15.** Пусть точки B_1 и C_1 симметричны точке A относительно прямых OB и OC (рис. 267). Угол BOC лежит внутри угла B_1OC_1, поэтому отрезок B_1C_1 пересекает стороны угла в некоторых точках B_2 и C_2. Выпустив бильярдный шар из точки A в точку B_2 (или в точку C_2), получите искомую траекторию. **24.16.** Ось симметрии прямой не может пересекать её под острым углом. **24.17.** Вершины многоугольника, не лежащие на его оси симметрии, разбиваются на пары. Ось симметрии треугольника — серединный перпендикуляр к отрезку, соединяющему две вершины треугольника, не лежащие на оси. **24.18.** Если у треугольника есть две оси симметрии, то все его стороны равны. **24.19.** Пусть ось симметрии четырёхугольника не является диагональю. Тогда по крайней мере три его вершины не лежат на оси симметрии, поэтому две вершины лежат по одну сторону от оси. Две другие вершины симметричны им. **24.20.** Вершины многоугольника, не лежащие на оси симметрии, разбиваются на пары. **24.21.** Пусть у четырёхугольника есть две оси симметрии. Если одна из них является его диагональю, то четырёхугольник — ромб. Если же обе оси не диагонали, то пары вершин симметричны относительно них и четырёхугольник — прямоугольник. **24.22.** Вершины семнадцатиугольника, не лежащие на оси симметрии, можно разбить на пары симметричных друг другу вершин. **24.23.** Проведите диаметр KL первой окружности и рассмотрите параллельный перенос, переводящий точку L в точку K (рис. 268). Этот параллельный перенос переводит первую окружность во вторую, а точку A — в некоторую точку A_1 второй окружности. При этом $\angle LAK = 90°$ и $LA \parallel KA_1$. Поэтому $\angle AKA_1 = 90°$, а значит, точка A_1 совпадает с точкой B. **24.24.** Рассмотрите параллельный перенос, переводящий одну окружность в другую. При этом

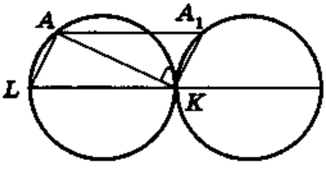


Рис. 268

точка M переходит в некоторую точку M_1 (рис. 269). Угол NMM_1 прямой, поэтому M_1N — диаметр окружности. Следовательно, $MN^2 + AB^2 = MN^2 + M_1M^2 = M_1N^2 = 4R^2$. **24.25.** Рассмотрите параллельный перенос, переводящий точки A и B в точки D и C соответственно. При этом точка M переходит в некоторую точку N (рис. 270). Четырёхугольник $DNCM$ обладает требуемыми свойствами. **24.26.** Поверните квадрат $ABCD$ относительно точки A на 90° так, чтобы точка B перешла в точку D. При этом повороте точка M переходит в некоторую точку M_1 (рис. 271). Ясно, что $\angle M_1AK = \angle M_1AD + \angle DAK = \angle MAB + \angle DAK = \angle MAK + \angle DAK = \angle MAD$. Далее, $\angle MAD = \angle BMA = \angle DM_1A$. Таким образом, $\angle M_1AK = \angle DM_1A$, поэтому $AK = KM_1 = KD + DM_1 = KD + BM$. **24.27.** При повороте на 90° с центром P прямые PA_1, PB_1, PM_1 и CH переходят в прямые, параллельные прямым CA, CB, CM и AB соответственно. Следовательно, при таком повороте треугольника PA_1B_1 отрезок PM_1 переходит в медиану повёрнутого треугольника. **24.28.** Рассмотрите поворот на 90° с центром O, переводящий вершину C в вершину A, а вершину F в вершину D. При этом повороте точка A переходит в некоторую точку A_1, а точка M — в точку M_1. Точки M_1 и O — середины сторон A_1D и A_1C треугольника A_1CD, поэтому $OM_1 \parallel CD$. Но $OM_1 \perp OM$, поэтому $CD \perp OM$. **24.29.** При повороте на 90° с центром в точке пересечения диагоналей квадрата, переводящем точку A_1 в точку A_2, проведённые прямые переходят в прямые A_2P, A_3P, A_4P и A_1P соответственно. **24.30.** Рассмотрите поворот с центром A на 90°, при котором точка B переходит в точку D. Пусть точка M_1 — образ точки M при этом повороте. По условию $MK + MC + CK = (BM + MC) + (KD + CK)$, поэтому $MK = BM + KD = DM_1 + KD = KM_1$. Кроме того, $AM = AM_1$, поэтому треугольники AMK и AM_1K равны и $\angle MAK = \angle M_1AK =$

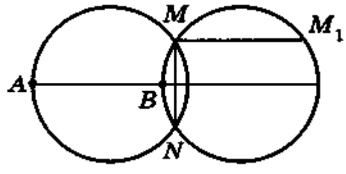


Рис. 269

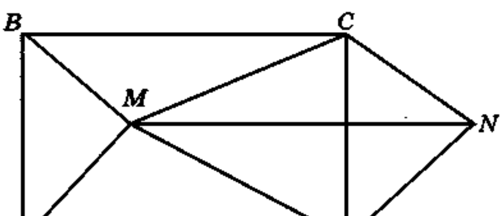


Рис. 270

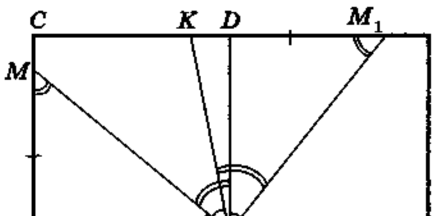


Рис. 271

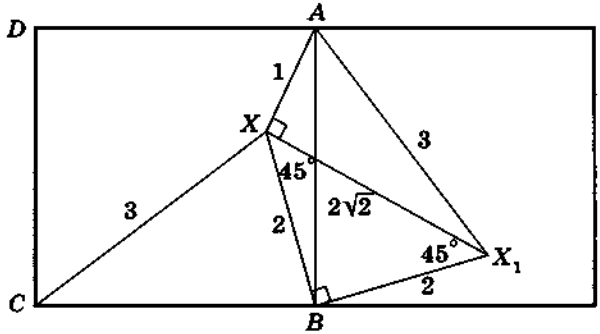


Рис. 272

$= \frac{1}{2}\angle MAM_1 = 45°$. **24.31.** Рассмотрите поворот на 90° с центром B так, чтобы точка C перешла в точку A (рис. 272). Точка X при этом перейдёт в некоторую точку X_1. В треугольнике XBX_1 угол XBX_1 прямой и $BX = BX_1$, поэтому $\angle X_1XB = 45°$ и, кроме того, $XX_1 = 2\sqrt{2}$. Таким образом, $X_1X^2 + AX^2 = 9 = X_1A^2$, поэтому $\angle X_1XA = 90°$. Следовательно, $\angle AXB = \angle X_1XB + \angle X_1XA = 45° + 90° = 135°$. **24.32.** Рассмотрите поворот на 60° с центром C, переводящий точку E в точку D. При этом точка B переходит в точку A, т. е. отрезок BE переходит в отрезок AD. Поэтому середина P отрезка BE переходит в середину M отрезка AD. Это означает, что треугольник CPM равносторонний. **24.33.** Рассмотрите поворот на 60° с центром C, при котором точка A переходит в точку B_1. При этом точка A_1 переходит в точку B, поэтому отрезок AA_1 переходит в отрезок B_1B. **24.34.** Пусть при повороте на 60° с центром B, переводящем точку A в точку C, точка D переходит в точку D_1. Тогда $\angle CD_1B = \angle ADB = 120°$ и $\angle BD_1D = 60°$, поэтому точка D_1 лежит на отрезке DC и $DC = DD_1 + D_1C = DB + DA$. Замечание. Другое решение приведено в указании к задаче 14.9. **24.35.** При повороте на 60° с центром A, переводящем вершину B в вершину C, точка M переходит в некоторую точку M_1, а точка C — в точку D. Равенство $MA^2 = MB^2 + MC^2$ эквивалентно равенству $M_1M^2 = M_1C^2 + MC^2$, т. е. тому, что $\angle MCM_1 = 90°$. Поэтому $\angle MCB + \angle MBC = \angle MCB + \angle M_1CD = 120° - 90° = 30°$, т. е. $\angle BMC = 150°$. Искомое множество — лежащая внутри треугольника дуга окружности, из которой отрезок BC виден под углом 150°. **24.36.** Рассмотрите поворот на 60° с центром A, переводящий точки C и C_1 в точки B_1 и B. При этом повороте точки A_1 и B переходят в некоторые точки A_2 и B_2 (рис. 273). Отрезок C_1A_1 переходит в отрезок BA_2. Отрезки BA_1 и B_1A_2 равны и параллельны, поэтому

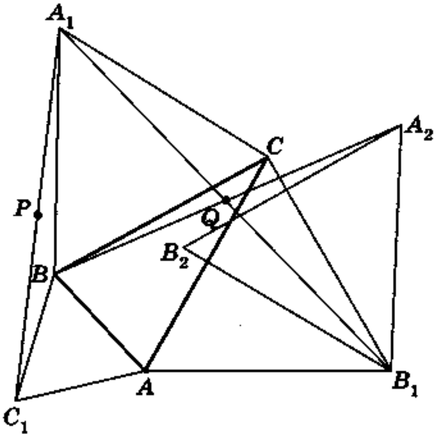


Рис. 273

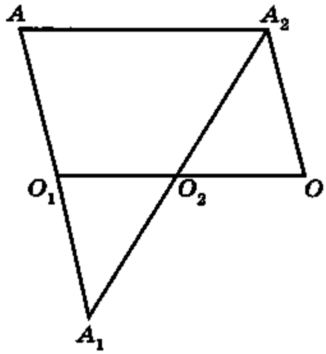


Рис. 274

середины отрезков BA_2 и A_1B_1 совпадают. **24.37.** Пусть O_1 и O_2 — центры симметрии, A — точка, не лежащая на прямой O_1O_2. Далее, при симметрии относительно точки O_1 точка A переходит в точку A_1, при симметрии относительно точки O_2 точка A_1 переходит в точку A_2, а при симметрии относительно точки O_2 точка O_1 переходит в точку O (рис. 274). Тогда четырёхугольник AA_2OO_1 — параллелограмм. **24.38.** Для двух разных порядков получаются параллельные переносы в противоположных направлениях. **24.39.** Пусть l_1 и l_2 — параллельные оси симметрии, точка O_1 равноудалена от прямых l_1 и l_2, точки O и O_2 симметричны точке O_1 относительно прямых l_1 и l_2, точка X не лежит на прямой O_1O_2, точка X_1 симметрична точке X относительно прямой l_1, точка X_2 симметрична точке X_1 относительно прямой l_2 (рис. 275). Тогда четырёхугольник XX_2O_2O — параллелограмм. **24.40.** Для двух разных порядков получаются параллельные переносы в противоположных направлениях. **24.41.** Пусть оси симметрии l_1 и l_2 перпендикулярны, O — точка их пересечения. Далее, точка A не лежит на прямых l_1 и l_2, точка A_1 симметрична точке A относительно прямой l_1, точка A_2 симметрична точке A_1 относительно прямой l_2 (рис. 276). Тогда угол AA_1A_2 прямой

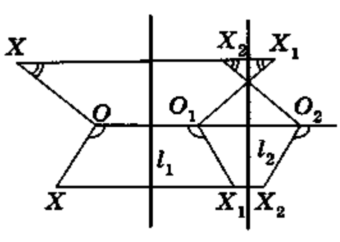


Рис. 275

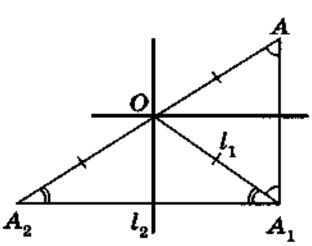


Рис. 276

и точка O — середина гипотенузы прямоугольного треугольника AA_1A_2. **24.42.** Воспользуйтесь задачей 24.41. **24.43.** Последовательное выполнение трёх симметрий: сначала относительно прямой m, затем относительно прямой l и потом снова относительно прямой m — является симметрией относительно прямой n (рис. 277). **24.44.** Если оси симметрии l и m не перпендикулярны, то прямая n, симметричная l относительно m, является третьей осью симметрии. **24.45.** Если фигура имеет ровно две оси симметрии, то эти оси взаимно перпендикулярны. **24.46.** Пусть точка X_1 симметрична точке X относительно прямой OA, точка X_2 симметрична точке X_1 относительно прямой OB и точка X_1 лежит внутри угла AOB. Если угол AOB острый, то $\angle XOX_2 = 2\angle AOB$ (рис. 278, *а*), если угол AOB тупой, то $\angle XOX_2 = 360° - 2\angle AOB$ (рис. 278, *б*). **24.47.** Для двух разных порядков получаются повороты в противоположных направлениях. Повороты на 180° в противоположных направлениях совпадают.

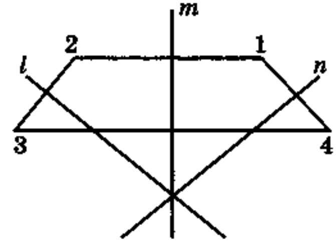


Рис. 277

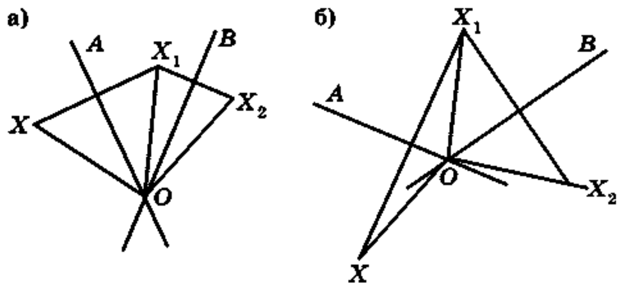


Рис. 278

Глава 25. Подобие

25.1. Середины сторон квадрата являются вершинами другого квадрата. При гомотетии с коэффициентом 2 и центром в данной точке середины сторон квадрата переходят в точки, симметричные данной точке относительно них. **25.2.** Точка C переходит в точку пересечения медиан треугольника ABC при гомотетии с коэффициентом $\frac{1}{3}$ и центром в середине стороны AB. **25.3.** При гомотетии с центром в точке пересечения диагоналей четырёхугольника и коэффициентом $\frac{3}{2}$ точки пересечения медиан указанных треугольников переходят в середины сторон четырёхугольника. Середины сторон четырёхугольника являются вершинами прямоугольника (задача 13.8). **25.4.** Пусть продолжения боковых сторон AB и CD трапеции $ABCD$ пересекаются в точке P, а её диагонали — в точке O. При гомотетии с центром P, переводящей отрезок BC в отрезок AD, точка M переходит в точку N, поэтому точка P лежит на прямой MN. При гомотетии с центром O, переводящей отрезок BC в отрезок DA, точка M переходит в точку N, поэтому точка O тоже лежит на прямой MN. Замечание. Другое решение приведено в указании к задаче 17.13. **25.5.** При гомотетии с коэффициентом $-\frac{1}{2}$ и центром в точке пересечения медиан треугольника вершина треугольника переходит в середину противоположной стороны. Поэтому прямая, содержащая биссектрису треугольника, переходит в прямую, проходящую через середину стороны параллельно биссектрисе противолежащего угла. **25.6.** При гомотетии с центром M и коэффициентом -2 прямые PA_1, PB_1 и PC_1 переходят в прямые l_a, l_b и l_c, поэтому точка Q является образом точки P при этой гомотетии. **25.7.** Одна окружность переходит в другую при гомотетии с центром K. **25.8.** Одна окружность переходит в другую при гомотетии с центром K. **25.9.** При гомотетии, переводящей первую окружность во вторую, вторая окружность переходит в третью. Квадрат коэффициента этой гомотетии равен $\frac{18}{2}=9$. **25.10.** При гомотетии с коэффициентом $\frac{1}{3}$ и центром в середине стороны AB точка C переходит в точку пересечения медиан треугольника ABC. **25.11.** Пусть прямая AB пересекает окружность радиуса r в точке C. Квадрат отрезка касательной равен $BA \cdot BC$, $BC = BA + AC$ и $AC = \frac{r}{R}a$. **25.12.** Пусть прямая AB пересекает окружность радиуса r в точке C. Квадрат отрезка касательной равен $BA \cdot BC$, $BC = BA - AC$ и $AC = \frac{r}{R}a$. **25.13.** Из свойств биссектрисы и теоремы синусов получите $AK : KD = AP : DP = \sin D : \sin A$ и $AL : LB = AQ : BQ = \sin B : \sin A$. Сумма углов B и D равна $180°$, поэтому $\sin B = \sin D$. Следовательно, $AK : KD = AL : LB$, поэтому рассматриваемые окружности гомотетичны. **25.14.** Проведите прямую, соединяющую центры окружностей, и рассмотрите диаметры, перпендикулярные этой прямой. Они являются основаниями трапеции. Центр одной гомотетии — точка пересечения диагоналей этой трапеции, центр другой гомотетии — точка пересечения продолжений боковых сторон. **25.15.** При гомотетии с коэффициентом -2 и центром в точке M точки A_1, B_1 и C_1 переходят в вершины треугольника. Поэтому при этой гомотетии ортоцентр треугольника $A_1B_1C_1$ переходит в ортоцентр H треугольника ABC. Но ортоцентр треугольника $A_1B_1C_1$ — это центр O описанной около треугольника ABC окружности. **25.16.** Треугольник BCB_2 прямоугольный, поэтому его медиана B_2A_1 равна половине гипотенузы BC. Следовательно, диагонали или боковые стороны трапеции с основаниями A_1C_1 и B_1B_2 равны. Поэтому эта трапеция равнобедренная и около неё можно описать окружность. Следовательно, точка B_2 лежит на окружности, описанной около треугольника $A_1B_1C_1$. Аналогично точки A_2 и C_2 лежат на этой окружности. **25.17.** Окружность S проходит через точки A_1 и A_2, поэтому её центр лежит на серединном перпендикуляре к отрезку A_1A_2. Три таких серединных перпендикуляра пересекаются в середине отрезка OH. Окружность S переходит в окружность, описанную около треугольника ABC, при гомотетии с коэффициентом -2 и центром M, поэтому радиус окружности S равен половине радиуса описанной окружности. **25.18.** Для каждого из этих треугольников окружность Эйлера проходит через середины отрезков AB, BC, CA, AH, BH и CH. **25.19.** Для остроугольного треугольника ABC точки A_2 и A_3 лежат по разные стороны от прямой B_3C_3 и $\angle B_3A_2C_3 = \angle B_3HC_3 = 180° - \angle B_3A_3C_3$. Треугольники ABC, HBC, AHC и ABH имеют общую окружность Эйлера, и один из этих треугольников остроугольный. **25.20.** Пусть искомый отрезок равен x. Основания подобных трапеций пропорциональны, поэтому $a : x = x : b$. **25.21.** Выполнив предварительно гомотетию, можно считать, что стороны трапеций соответственно равны. Отложим на основаниях AD и A_1D_1 отрезки AE и A_1E_1, равные BC. Треугольники CDE и $C_1D_1E_1$ равны по трём сторонам. **25.22.** Преобразованием подобия можно совместить сторону одного данного четырёхугольника со стороной другого так, чтобы углы при этих сторонах тоже совместились. Рассмотрите четырёхугольники $ABCD$ и ABC_1D_1 с общей стороной AB и общими углами с вершинами A и B; диагонали четырёхугольников пересекаются в точках O и O_1 (рис. 279). Стороны CD и C_1D_1

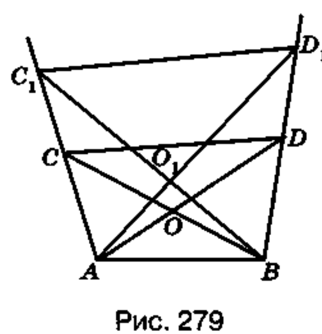


Рис. 279

параллельны или совпадают. Предположите, что они не совпадают и, для определённости, $AC_1 > AC$. Тогда $\angle ABC_1 > \angle ABC$ и $\angle BAD_1 > \angle BAD$, поэтому $\angle AO_1B < \angle AOB$, что противоречит условию.

Глава 26. Методы решения задач на построение

26.1. Пусть R — радиус данной окружности, O — её центр. Центр искомой окружности лежит на окружности радиуса $|R \pm r|$ с центром O и на прямой, параллельной данной прямой и удалённой от неё на расстояние r (таких прямых две). **26.2.** Центр данной окружности лежит на серединном перпендикуляре к отрезку AB и на прямой, проходящей через точку B перпендикулярно к прямой l. **26.3.** Середины всех хорд данной окружности, имеющих заданную длину, лежат на окружности с тем же центром, что и данная окружность. К этой окружности нужно провести касательную, параллельную данной прямой. **26.4.** Середины хорд данной окружности, имеющих заданную длину, лежат на окружности с тем же центром. К этой окружности нужно провести касательную из данной точки. **26.5.** Пусть O — центр данной окружности, AB — хорда, проходящая через точку P, M — середина хорды AB. Тогда $|AP - BP| = 2PM$. Угол PMO прямой, поэтому точка M лежит на окружности S с диаметром OP. Постройте окружность S и проведите её хорду PM так, что $PM = \frac{a}{2}$ (таких хорд две). Искомая хорда лежит на прямой PM. **26.6.** Множество точек, из которых данная окружность радиуса R с центром O видна под углом 2α, — это окружность с центром O, радиус которой равен гипотенузе прямоугольного треугольника, в котором против угла α лежит катет длины R. **26.7.** Построим середину A_1 данного отрезка BC. Точка C_1 — это точка пересечения окружности радиуса m_c с центром C и дуги окружности, из которой отрезок BA_1 виден под углом, равным данному углу A. **26.8.** Постройте сначала отрезок $CC_1 = m_c$ и центр O окружности, из которой отрезок CC_1 виден под данным углом A (таких точек две, мы выбираем любую из них). Затем постройте точку M, в которой пересекаются медианы треугольника ABC (эта точка делит отрезок CC_1 в отношении $2:1$). Точка B_1 — это точка пересечения окружности, построенной на отрезке CO как на диаметре, и окружности радиуса $\frac{m_b}{3}$ с центром M. **26.9.** Постройте на прямой l отрезок длины a и рассмотрите образы окружности S_1 при двух параллельных переносах, переводящих концы отрезка друг в друга. Искомая прямая проходит через точку пересечения окружности S_2 и образа окружности S_1. **26.10.** Пусть O_1 и O_2 — проекции центров окружностей S_1 и S_2 на прямую l. Рассмотрите образ окружности S_1 при параллельном переносе, переводящем точку O_1 в точку O_2. Искомая прямая проходит через точку пересечения этого образа и окружности S_2. **26.11.** Предположите, что точка X построена. Рассмотрите параллельный перенос, переводящий точку E в точку F. Этот параллельный перенос задан, поэтому можно построить точку A_1, в которую точка A переходит при этом переносе (рис. 280). Углы A_1FB и AXB равны, поэтому угол A_1FB известен. Точка F — это точка пересечения отрезка CD и дуги окружности, из которой отрезок A_1B виден под таким же углом, как и отрезок AB из точек заданной окружности. **26.12.** Предположите, что четырёхугольник $ABCD$ построен. Рассмотрите параллельный перенос, при котором точка C переходит в точку B. Пусть точка D при этом переносе переходит в точку D_1 (рис. 281). В треугольнике ABD_1 известны стороны $AB = a$ и $BD_1 = b$ и угол между ними, поэтому его можно построить. Затем постройте лучи AD и BC и проведите через точку D_1 прямую, параллельную прямой BC.

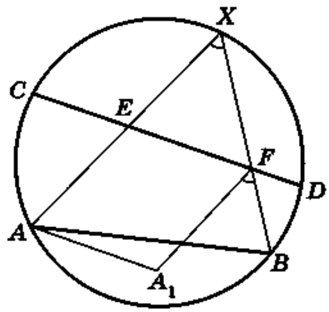


Рис. 280

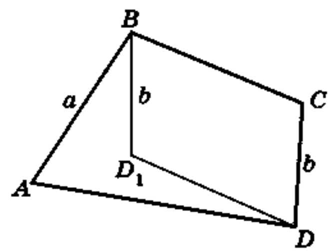


Рис. 281

26.13. Предположите, что точки M и N, в которых прямая l пересекает окружность S_2, построены. Пусть O_1 и O_2 — центры окружностей S_1 и S_2; O_1' — образ точки O_1 при параллельном переносе, переводящем точку M в точку N, S_1' — образ окружности S_1 при этом переносе. Проведём касательные AP и AQ к окружностям S_1' и S_2. Тогда $AQ^2 = AM \cdot AN = AP^2$, а значит, $O_1'A^2 = AP^2 + R^2$, где R — радиус окружности S_1'. Отрезок AP можно построить, поэтому можно построить и отрезок длины AO_1'. Точка O_1' — это точка пересечения окружности радиуса AO_1' с центром A и окружности, диаметром которой служит отрезок O_1O_2. **26.14.** Предположите, что точки P и Q лежат на окружностях S_1 и S_2 соответственно и точка A

лежит на отрезке PQ. Проведите из центров O_1 и O_2 окружностей S_1 и S_2 перпендикуляры O_1M и O_2N к прямой PQ. Рассмотрите параллельный перенос, переводящий точку M в точку N. Пусть C — образ точки O_1 при этом переносе. Треугольник O_1CO_2 прямоугольный, и $O_1C = MN = \frac{PQ}{2}$. Следовательно, чтобы построить прямую PQ, для которой $PQ = a$, нужно построить треугольник O_1CO_2 с заданной гипотенузой O_1O_2 и катетом $O_1C = \frac{a}{2}$, а затем провести через точку A прямую, параллельную O_1C. **26.15.** Рассмотрите точку пересечения данной окружности и прямой, симметричной данной прямой относительно точки A. **26.16.** Рассмотрите точки пересечения угла ABC и угла, симметричного ему относительно точки D. **26.17.** Рассмотрите точку пересечения большей окружности и окружности, симметричной меньшей окружности относительно её произвольной точки. **26.18.** Рассмотрите окружность, симметричную одной из данных окружностей относительно точки A. **26.19.** Пусть точка A_1 симметрична точке A относительно прямой l (рис. 282). Тогда точка M пересечения прямых A_1B и l искомая. Действительно, если M_1 — любая другая точка прямой l, то $AM_1 + M_1B = A_1M_1 + M_1B > A_1B = A_1M + MB = AM + MB$. **26.20.** Предположите, что треугольник ABC построен. Пусть точка C_1 симметрична точке C относительно серединного перпендикуляра к стороне AB, точка B_1 симметрична точке B относительно прямой CC_1. Для определённости считайте, что $AC < BC$ (рис. 283). Тогда $\angle ACB_1 = \angle ACC_1 + \angle C_1CB = 180° - \angle A + \angle C_1CB = 180° - (\angle A - \angle B)$. Прямоугольный треугольник ABB_1 можно построить по катетам AB и $BB_1 = 2h$. Точку C постройте как точку пересечения серединного перпендикуляра к отрезку BB_1 и дуги окружности, из которой отрезок AB_1 виден под углом $180° - (\angle A - \angle B)$. **26.21.** Предположите, что треугольник ABC

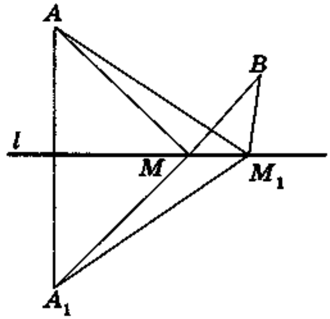


Рис. 282

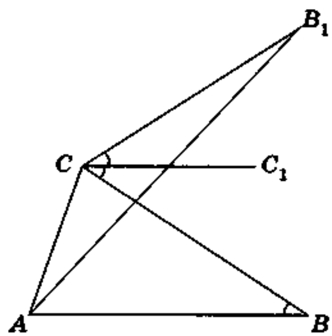


Рис. 283

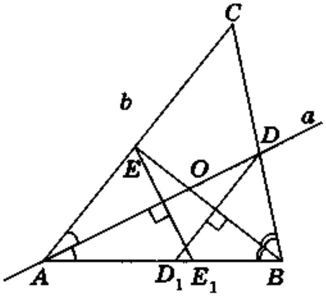


Рис. 284

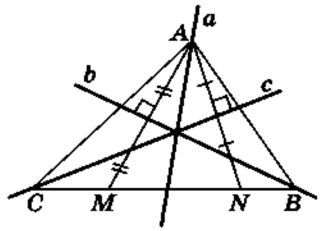


Рис. 285

построен. Рассмотрите точки D_1 и E_1, симметричные точкам D и E относительно прямых b и a (рис. 284). Искомые точки A и B — это точки пересечения прямой D_1E_1 с прямыми a и b; точка C — это точка пересечения прямых AE и BD. Если точки D_1 и E_1 совпадают, то через точку D_1 можно провести любую прямую, пересекающую лучи OA и OB. **26.22.** Рассмотрите точки M и N, симметричные точке A относительно прямых b и c (рис. 285). Прямая MN пересекает прямые b и c в искомых точках B и C. **26.23.** Предположите, что треугольник ABC построен. Пусть AA_1, BB_1 и CC_1 — его медианы, M — точка их пересечения, M_1 — точка, симметричная точке M относительно точки A_1. Тогда $MM_1 = \frac{2}{3}AA_1$, $MC = \frac{2}{3}CC_1$ и $M_1C = \frac{2}{3}BB_1$, поэтому треугольник MM_1C можно построить. Точка A симметрична точке M_1 относительно точки M, а точка B симметрична точке C относительно середины отрезка MM_1. **26.24.** Высоты h_a, h_b, h_c треугольника обратно пропорциональны сторонам a, b, c. Поэтому стороны искомого треугольника с точностью до пропорциональности равны $\frac{1}{h_a}$, $\frac{1}{h_b}$, $\frac{1}{h_c}$. Постройте сначала треугольник со сторонами d, $\frac{dh_a}{h_b}$, $\frac{dh_a}{h_c}$, где d — произвольный отрезок, затем постройте одну из его высот и найдите коэффициент подобия исходного треугольника построенному. **26.25.** Сначала отметьте на стороне AB произвольную точку K_1 и постройте квадрат $K_1L_1M_1N_1$ так, чтобы вершины L_1 и M_1 лежали на стороне BC, а затем постройте требуемый квадрат с помощью гомотетии с центром B. **26.26.** Сначала постройте произвольную окружность, касающуюся сторон угла, а затем постройте требуемую окружность с помощью гомотетии с центром B. Таких окружностей две. **26.27.** Постройте произвольную окружность, касающуюся одной стороны треугольника, затем постройте равную ей окружность, касающуюся той же стороны и построенной окружности. После этого опишите вокруг этих окружностей треугольник, подобный данному. Требуемые окружности можно построить теперь с помощью гомотетии, переводящей один треугольник в другой. **26.28.** Сначала постройте квадрат, одной из сторон которого является данная хорда. Искомый квадрат получается из этого квадрата при гомотетии с центром в середине хорды. **26.29.** Сначала постройте квадрат, описанный около окружности, две стороны которого параллельны данной хорде. Искомый квадрат получается из этого квадрата при гомотетиях с центрами в серединах этих двух сторон. **26.30.** Проведите два параллельных диаметра данных окружностей и соедините (двумя способами) их концы.

Глава 27. Координаты

27.1. Первый способ. Прямая $y = y_0$ пересекает данную прямую в точке с координатами $(x_1;\ y_0)$, где $ax_1 + by_0 + c = 0$. Поэтому $x_0 - x_1 = \dfrac{ax_0 + by_0 + c}{a}$. Искомое расстояние равно высоте, проведённой к гипотенузе прямоугольного треугольника с катетами $\left|\dfrac{ax_0 + by_0 + c}{a}\right|$ и $\left|\dfrac{ax_0 + by_0 + c}{b}\right|$. Для треугольника с катетами u и v эта высота равна $\dfrac{uv}{\sqrt{u^2 + v^2}}$. **Второй способ.** Запишите уравнение прямой, проходящей через точку с координатами $(x_0;\ y_0)$ перпендикулярно данной прямой, и найдите координаты точки пересечения этой прямой и данной прямой. **27.2.** Введите прямоугольную систему координат, начало которой — одна из вершин прямоугольника, а оси направлены по его сторонам. **27.3.** Прямая, проходящая через точки $(0;\ 0)$ и $(x_1;\ y_1)$, задаётся уравнением $y_1x - x_1y = 0$. Поэтому согласно задаче 27.1 расстояние от точки $(x_2;\ y_2)$ до этой прямой равно $\dfrac{|y_1x_2 - x_1y_2|}{\sqrt{x_1^2 + y_1^2}}$.

Это расстояние равно высоте рассматриваемого треугольника, проведённой к стороне длиной $\sqrt{x_1^2 + y_1^2}$. **27.4.** Введите прямоугольную систему координат так, чтобы точки A и B имели координаты $(-a;\ 0)$ и $(a;\ 0)$ соответственно. Координаты $(x;\ y)$ точки M, для которой $AM^2 = k^2BM^2$, удовлетворяют уравнению

$$(x + a)^2 + y^2 = k^2((x - a)^2 + y^2),$$

т. е.

$$\left(x+\frac{1+k^2}{1-k^2}a\right)^2=\left(\frac{2ka}{1-k^2}\right)^2.$$

27.5. Уравнение, которому удовлетворяют координаты $(x;\ y)$ точки X, имеет вид $k(x^2+y^2)+px+qy+r=0$, где $k=k_1+\ldots+k_n$. **27.6.** См. указание к задаче 27.5. **27.7.** Пусть $(a_1;\ b_1)$, $(a_2;\ b_2)$ и $(a_3;\ b_3)$ — координаты вершин треугольника. Координаты центра описанной около него окружности задаются системой уравнений

$$\begin{cases}(x-a_1)^2+(y-b_1)^2=(x-a_2)^2+(y-b_2)^2,\\(x-a_1)^2+(y-b_1)^2=(x-a_3)^2+(y-b_3)^2.\end{cases}$$

После сокращений получаются линейные уравнения, поэтому решение рассматриваемой системы уравнений рационально. **27.8.** Отметьте на отрезках AB и CD точки K и L, делящие их в указанных отношениях. Докажите, что точка пересечения прямых AK и CL лежит на окружности S. Для этого введите систему координат с началом в центре O окружности S и осями Ox и Oy, направленными по лучам OB и OD. Радиус окружности S можно считать равным 1. Прямые AK и CL задаются уравнениями $y=\frac{x+1}{3}$ и $y=2x-1$. Поэтому их общая точка имеет координаты $x_0=\frac{4}{5}$ и $y_0=\frac{3}{5}$. Ясно, что $x_0^2+y_0^2=1$. **27.9.** Пусть r и R — радиусы вписанной и описанной окружностей, d — расстояние от центра описанной окружности до образа центра вписанной окружности при рассматриваемой гомотетии. Убедитесь, что $|R-2r|=d$. Пусть $(0;\ 0)$, $(2a;\ 0)$ и $(0;\ 2b)$ — координаты вершин треугольника. Тогда $(a;\ b)$ — координаты центра описанной окружности, $(r;\ r)$ — координаты центра вписанной окружности, причём $r=a+b-R$ (задача 21.4). Следовательно, $d^2=(2r-a)^2+(2r-b)^2=a^2+b^2-4r(a+b-r)+4r^2=(R-2r)^2$, так как $a^2+b^2=R^2$. **27.10.** Отрезки касательных равны AK. **27.11.** Квадраты отрезков касательных равны $AM\cdot AN$. **27.12.** Пусть R и r — радиусы окружностей. Рассмотрите систему координат, в которой центры окружностей имеют координаты $(-a;\ 0)$ и $(a;\ 0)$. Степени точки с координатами $(x;\ y)$ относительно данных окружностей равны $(x+a)^2+y^2-R^2$ и $(x-a)^2+y^2-r^2$ соответственно. Приравнивая эти выражения, получаем $x=\frac{R^2-r^2}{4a}$. Это уравнение задаёт прямую, перпендикулярную отрезку, соединяющему центры окружностей.

27.13. Согласно задаче 27.12 искомое множество — прямая, перпендикулярная отрезку, соединяющему центры окружностей. Кроме того, эта прямая содержит точку K. **27.14.** Согласно задаче 27.12 искомое множество — прямая. Эта прямая содержит точки M и N. **27.15.** Середина отрезка общей касательной лежит на радикальной оси. **27.16.** Центры окружностей не лежат на одной прямой, поэтому радикальная ось первой и второй окружностей пересекается с радикальной осью второй и третьей окружностей. Степени точки пересечения относительно всех трёх окружностей равны, поэтому она лежит на радикальной оси первой и третьей окружностей. **27.17.** Прямые, содержащие общие хорды окружностей, являются радикальными осями этих окружностей. Эти радикальные оси пересекаются в одной точке, если центры окружностей не лежат на одной прямой. В противном случае они перпендикулярны этой прямой.

Глава 28. Векторы

28.1. Вычислите скалярное произведение векторов $\overrightarrow{AC}$ и $\overrightarrow{BD}$. **28.2.** Пусть $\vec{a} = \overrightarrow{AB}$, $\vec{b} = \overrightarrow{BC}$, $\vec{c} = \overrightarrow{CD}$ и $\vec{d} = \overrightarrow{DA}$. Тогда $d^2 = \left(\vec{a} + \vec{b} + \vec{c}\right)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + \sqrt{2}\left(\vec{a}\vec{b} + \vec{a}\vec{c} + \vec{b}\vec{c}\right)$ и $\overrightarrow{AC}\,\overrightarrow{BD} = \left(\vec{a} + \vec{b}\right)\left(\vec{b} + \vec{c}\right)^2 = b^2 + \vec{a}\vec{b} + \vec{a}\vec{c} + \vec{b}\vec{c}$. Поэтому диагонали AC и BD перпендикулярны тогда и только тогда, когда $a^2 + c^2 = b^2 + d^2$. **28.3.** Представьте каждый выбранный вектор $\overrightarrow{AB}$ в виде $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AO} - \overrightarrow{OB}$, где O — некоторая фиксированная точка. **28.4.** Вычислите в координатах скалярное произведение векторов $\overrightarrow{KM}$ и $\overrightarrow{NL}$. **28.5.** Вектор $\overrightarrow{CH} = \overrightarrow{OH} - \overrightarrow{OC} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB}$ перпендикулярен прямой AB. **28.6.** Положите $\vec{a} = \overrightarrow{AB}$, $\vec{b} = \overrightarrow{BC}$ и $\vec{c} = \overrightarrow{CD}$. Тогда $AB^2 + BC^2 + CD^2 + DA^2 - AC^2 - BD^2 = \left(\vec{a} + \vec{c}\right)^2$. **28.7.** Пусть точки O_1 и O_2 — центры первых и вторых часов, точки M_1 и M_2 — концы часовых стрелок первых и вторых часов в какой-то момент времени (эти точки равномерно движутся по окружностям). Тогда $\overrightarrow{M_1M_2} = \overrightarrow{O_1O_2} + \left(\overrightarrow{M_1O_1} + \overrightarrow{O_2M_2}\right)$. Вектор $\overrightarrow{M_1O_1} + \overrightarrow{O_2M_2}$ имеет постоянную длину и равномерно вращается. **28.8.** Положите $\overrightarrow{OA} = OA\vec{a}$, $\overrightarrow{OB} = OB\vec{b}$ и $\overrightarrow{OC} = OC\vec{c}$; векторы $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{c}$ имеют единичную длину. Левую часть искомого равенства можно записать в виде $\frac{1}{2}OA \cdot OB \cdot OC \left(\sin BOC \times\right.$ $\left.\times \vec{a} + \sin AOC \cdot \vec{b} + \sin AOB \cdot \vec{c}\right)$. Проекции векторов $\sin AOC \cdot \vec{b}$ и $\sin AOB \cdot \vec{c}$ на прямую, перпендикулярную вектору $\vec{a}$, равны по длине и противоположно направлены. **28.9.** Пусть X и O — некоторые точки. Тогда $m_1\overrightarrow{OX_1} + \ldots + m_n\overrightarrow{OX_n} = (m_1 + \ldots + m_n)\,\overrightarrow{OX} + m_1\overrightarrow{XX_1} + \ldots + m_n\overrightarrow{XX_n}$. Поэтому точка O — центр масс тогда и только тогда, когда $(m_1 + \ldots + m_n)\overrightarrow{OX} + m_1\overrightarrow{XX_1} + \ldots + m_n\overrightarrow{XX_n} = \vec{0}$, т. е. $\overrightarrow{XO} = \frac{1}{m_1 + \ldots + m_n} \times$ $\times \left(m_1\overrightarrow{XX_1} + \ldots + m_n\overrightarrow{XX_n}\right)$. Выбрав произвольно точку X, с помощью этого равенства найдите центр масс O; сделать это можно единственным образом. **28.10.** См. указание к задаче 28.9. **28.11.** Пусть точка O — центр масс точек X_1, ..., X_n, Y_1, ..., Y_m с массами a_1, ..., a_n, b_1, ..., b_m, а точка Y — центр масс точек Y_1, ..., Y_m с массами b_1, ..., b_m. Тогда $a_1\overrightarrow{OX_1} + \ldots + a_n\overrightarrow{OX_n} + b_1\overrightarrow{OY_1} + \ldots + b_m\overrightarrow{OY_m} = \vec{0}$ и $b_1\overrightarrow{YY_1} + \ldots + b_m\overrightarrow{YY_m} = \vec{0}$. Вычитая второе равенство из первого, получаем $a_1\overrightarrow{OX_1} + \ldots + a_n\overrightarrow{OX_n} + (b_1 + \ldots + b_m)\overrightarrow{OY} = \vec{0}$. Это означает, что точка O — центр масс точек $X_1, \ldots, X_n$, Y с массами a_1, ..., a_n, $b_1 + \ldots + b_m$. **28.12.** Согласно определению центра масс $a\overrightarrow{OA} + b\overrightarrow{OB} = \vec{0}$, поэтому точка O лежит на отрезке AB и $aOA = bOB$, т. е. $AO : OB = b : a$. **28.13.** Пусть O — центр масс этой системы точек. Точка O является также центром масс точки A с массой 1 и точки A_1 с массой 2, где A_1 — центр масс точек B и C с единичными массами, т. е. A_1 — середина отрезка BC. Поэтому точка O лежит на медиане AA_1. Аналогично доказывается, что остальные медианы проходят через точку O. **28.14.** Поместите в вершины четырёхугольника $ABCD$ единичные массы. Пусть точка O — центр масс этой системы точек. Покажите, что эта точка является серединой отрезков KM и LN и серединой отрезка, соединяющего середины диагоналей. Точка K — центр масс точек A и B, точка M — центр масс точек C и D. Поэтому точка O является центром масс точек K и M с массами 2, т. е. точка O — середина отрезка KM. Аналогично точка O — середина отрезка LN. Центр масс точек A и C — середина диагонали AC, центр масс точек B и D — середина диагонали BD, поэтому точка O является серединой отрезка, соединяющего середины диагоналей.

28.15. Пусть прямые AA_1 и CC_1 пересекаются в точке O; $AC_1 : C_1B = p$ и $BA_1 : A_1C = q$. Нужно доказать, что прямая BB_1 проходит через точку O тогда и только тогда, когда $CB_1 : B_1A = 1 : pq$. Поместите в точки A, B и C массы 1, p и pq соответственно. Тогда точка C_1 является центром масс точек A и B, а точка A_1 — центром масс точек B и C. Поэтому центр масс точек A, B и C с данными массами — это точка O, в которой пересекаются прямые CC_1 и AA_1. Кроме того, точка O лежит на отрезке, соединяющем точку B с центром масс точек A и C. Если точка B_1 — центр масс точек A и C с массами 1 и pq, то $AB_1 : B_1C = pq : 1$. На отрезке AC есть ровно одна точка, делящая его в данном отношении $AB_1 : B_1C$. **28.16.** Поместим в точки A, B, C и D массы 1, a, ab и b соответственно. Тогда точки K, L, M и N являются центрами масс пар точек (A, B), (B, C), (C, D) и (D, A) соответственно. Пусть точка O — центр масс точек A, B, C и D с указанными массами. Тогда точка O лежит на отрезке NL и $NO : OL = (ab + a) : (1 + b) = a$. Точка O лежит также на отрезке KM, и $KO : OM = (b + ab) : (1 + a) = b$. Поэтому O — точка пересечения отрезков KM и LN, т. е. точки O и P совпадают. Следовательно, $NP : PL = NO : OL = a$ и $KP : PM = b$. **28.17.** При симметрии относительно оси симметрии центр масс точек единичной массы, расположенных в вершинах многоугольника, переходит в себя, поэтому все оси симметрии многоугольника проходят через центр масс.

Глава 29. Правильные многоугольники

29.1. Сумма квадратов расстояний от произвольной точки окружности радиуса R до диаметрально противоположных вершин вписанного в эту окружность правильного $2n$-угольника равна $4R^2$. **29.2.** Вершины правильного n-угольника делят описанную около него окружность на дуги, градусная мера каждой из которых равна 2α. Вписанный угол равен половине градусной меры дуги, на которую он опирается, а угол между двумя хордами равен полусумме или полуразности градусных мер двух дуг, высекаемых этими хордами. **29.3.** Основания перпендикуляров лежат на окружности, диаметром которой служит отрезок OM, где O — центр окружности. Они делят эту окружность на дуги, на которые опираются вписанные углы в $\frac{180°}{n}$. **29.4.** Пусть диагонали AC и BD правильного пятиугольника $ABCDE$ пересекаются в точке F. Равнобедренный треугольник BEC с основанием a и боковой стороной b подобен равнобедренному треугольнику BAF с основанием $b - a$ и боковой стороной a. **29.5.** Пусть O — точка пересечения диагоналей A_3A_8 и

A_4A_{11}. Треугольник OA_8A_{11} равносторонний, поэтому $\angle OA_2A_5 = 15°$ (задача 6.27). **29.6.** При повороте на угол $\frac{360°}{n}$ с центром O вектор $\overrightarrow{OA_1} + \ldots + \overrightarrow{OA_n}$ переходит в себя. **29.7.** Пусть X — точка на описанной окружности, O — центр правильного многоугольника $A_1 \ldots A_n$. Тогда $\left(XA_i\right)^2 = \left(\overrightarrow{XO} + \overrightarrow{OA_i}\right)^2 = 2R^2 + 2\left(\overrightarrow{XO},\ \overrightarrow{OA_i}\right)$. Сложите такие выражения для всех i и воспользуйтесь тем, что $\overrightarrow{OA_1} + \ldots + \overrightarrow{OA_n} = \vec{0}$. В результате получите требуемое. **29.8.** Рассмотрите правильный семиугольник $A_1A_2 \ldots A_7$ и примените теорему Птолемея (задача 21.49) к вписанному четырёхугольнику $A_1A_3A_4A_5$.

Глава 30. Длина окружности и площадь круга

30.1. Пусть сторона ромба равна a. Тогда площадь ромба равна $a^2\sin\alpha$. Радиус вписанного в ромб круга равен половине высоты ромба, т. е. он равен $\frac{a\sin\alpha}{2}$. Площадь вписанного в ромб круга равна $\pi\left(\frac{a\sin\alpha}{2}\right)^2$. **30.2.** Длина дуги окружности пропорциональна опирающемуся на неё центральному углу, поэтому на меньшую из дуг опирается центральный угол в 90°. Площадь сегмента, ограниченного этой дугой и хордой, равна $\frac{\pi R^2}{4} - \frac{R^2}{2} = \frac{R^2(\pi - 2)}{4}$, где R — радиус окружности. Площадь остальной части круга равна $\pi R^2 - \frac{R^2(\pi - 2)}{4} = \frac{R^2(3\pi + 2)}{4}$. **30.3.** Пусть радиус описанной окружности равен R, а радиус вписанной окружности равен r. Рассмотрим треугольник, одна вершина которого — центр правильного многоугольника, другая — вершина многоугольника, а третья — середина выходящей из этой вершины стороны. Этот треугольник прямоугольный с гипотенузой R и катетами r и $\frac{a}{2}$. Поэтому $R^2 - r^2 = \left(\frac{a}{2}\right)^2$. **30.4.** Пусть $2a$ и $2b$ — длины катетов, $2c$ — длина гипотенузы. Сумма площадей «луночек» равна $\pi a^2 + \pi b^2 + S_{ABC} - \pi c^2$. По теореме Пифагора $a^2 + b^2 = c^2$, поэтому $\pi(a^2 + b^2 - c^2) = 0$. **30.5.** Рассмотрите в круге сегмент, отсекаемый хордой, на которую опирается центральный угол 90°; пусть S и s — площади таких сегментов для исходного и четырёх построенных кругов соответственно. Ясно, что $S = 4s$. Общая часть двух кругов состоит из двух маленьких сегментов (закрашены голубым на

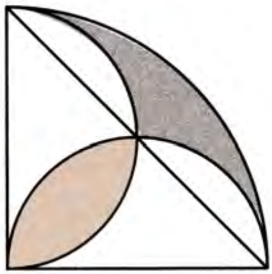


Рис. 286

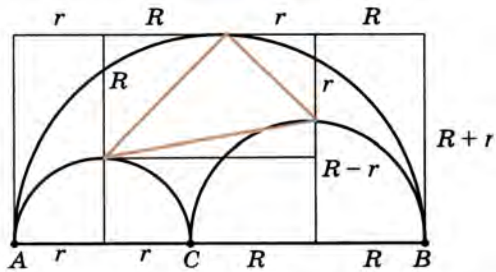


Рис. 287

рис. 286), поэтому её площадь равна $2s$. Соответствующая этой паре кругов внешняя фигура состоит из большого сегмента, из которого вырезаны два маленьких сегмента (закрашены серым на рис. 286), поэтому её площадь равна $S - 2s = 2s$. **30.6.** Пусть радиусы меньших полуокружностей равны r и R, причём $r < R$. Тогда площадь фигуры, ограниченной дугами полуокружностей, равна πrR, а площадь рассматриваемого треугольника равна площади прямоугольника со сторонами R и $R + r$, из которого вырезаны прямоугольные треугольники с катетами R и R, r и r, $R + r$ и $R - r$ (рис. 287). **30.7.** Пусть радиусы меньших полуокружностей равны r и R, причём $r < R$. Тогда площадь фигуры, ограниченной дугами полуокружностей, равна $\pi(R^2 + rR + r^2)$, а площадь рассматриваемого треугольника равна площади прямоугольника со сторонами $2R + r$ и $R + r$, из которого вырезаны прямоугольные треугольники с катетами R и $R + 2r$, r и $2R + r$, $R + r$ и $R - r$ (рис. 288). Комментарий. В том случае, когда полуокружности с диаметрами AC и CB расположены по разные стороны от отрезка AB, отношение площади фигуры, ограниченной дугами, к площади треугольника тоже равно π. **30.8.** Площадь сектора,

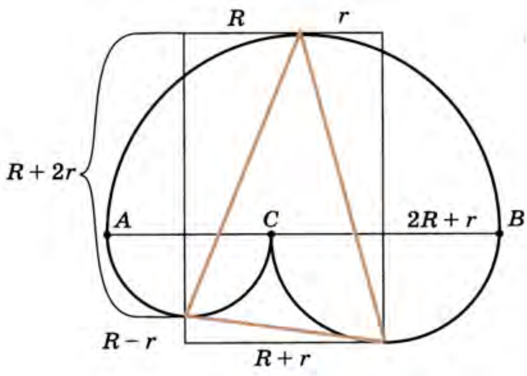


Рис. 288

ограниченного радиусами OC и OP, равна $\pi(OC)^2\frac{\angle COP}{360}$, а площадь сектора, ограниченного радиусами DE и DF, равна $\pi(DE)^2\frac{\angle EDP}{360}$. Угол COP вдвое больше угла EDP, а OC^2 вдвое меньше OD^2. **30.9.** Пусть O — точка пересечения отрезков AB и CD, H — точка пересечения отрезка CD и окружности радиуса DB с центром D. Из задачи 30.8 следует, что площадь криволинейного четырёхугольника $CPFH$ равна площади треугольника DOP. Высоты треугольников DOP и DOP_1, проведённые к общему основанию, равны, поэтому площади этих треугольников равны. **30.10.** Пусть A_1, B_1, C_1 — точки пересечения окружностей, построенных на отрезках OB и OC, OA и OC, OA и OB. Углы OA_1B и OA_1C прямые (рис. 289), поэтому точки B, A_1 и C лежат на одной прямой. Кроме того, $BA_1 = A_1C$, так как радиусы окружностей равны. Точки A_1, B_1, C_1 являются серединами сторон треугольника ABC, поэтому $BA_1 = C_1B_1$ и $BC_1 = A_1B_1$. Равные хорды BA_1 и C_1B_1 отсекают от равных кругов сегменты равной площади. Равные хорды C_1B и B_1A_1 также отсекают сегменты равной площади. Поэтому площадь криволинейного треугольника $A_1B_1C_1$ равна площади параллелограмма $A_1B_1C_1B$, т. е. равна половине площади треугольника ABC. **30.11.** Рассматриваемые окружности проходят через основания высот треугольника, поэтому точки их пересечения лежат на сторонах треугольника. Пусть x, y, z и u — площади рассматриваемых криволинейных треугольников; a, b, c, d, e и f — площади сегментов, отсекаемых от окружностей сторонами треугольника; p, q и r — площади частей треугольника, лежащих вне внутреннего криволинейного треугольника (рис. 290). Тогда $x + (a + b) = u + p + q + (c + f)$, $y + (c + d) = u + q + r + (e + b)$ и $z + (e + f) = u + r + p + (a + d)$. Складывая эти равенства, получаем $x + y + z = 2(p + q + r + u) + u$.

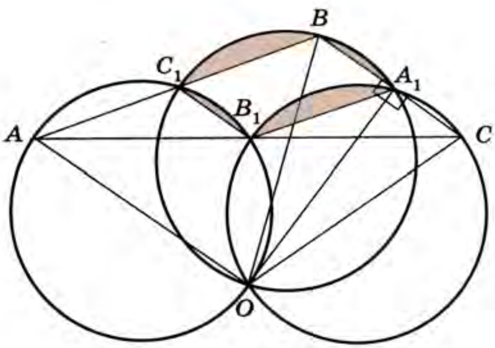


Рис. 289

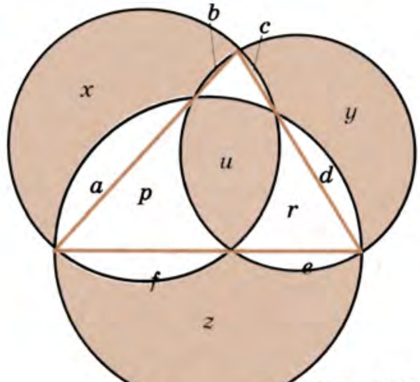


Рис. 290

Пояснения и комментарии

К главе 1. Прямая и отрезок, луч и угол. Есть мнение, что в математике, особенно в геометрии, всё нужно доказывать. Это неверное мнение. Чтобы что-то доказывать, нужно на что-то опираться, из чего-то исходить. Например, в геометрии не доказывают, что

через любые две точки проходит прямая, и притом только одна.

Это утверждение принимается без доказательства. Из него исходят в рассуждениях о свойствах прямых и точек. «Точка» и «прямая» — это основные понятия в геометрии. Геометрия начинается с понятий и утверждений об этих понятиях, принимаемых без доказательства.

Такой подход к математическим доказательствам, когда некоторые достойные уважения и никем не оспариваемые утверждения принимаются без доказательства и из них выводятся другие утверждения, был разработан в Древней Греции. Слово «достойный» по-гречески произносится «аксиос», и такие утверждения стали называть аксиомами.

Система принимаемых без доказательства утверждений, описывающая плоскость, довольно сложная. Поэтому она вводится не сразу, а постепенно, чтобы можно было освоиться с тем, как эти утверждения применяются для доказательства других утверждений. Древнегреческим математикам, кстати сказать, так и не удалось построить полную систему понятий и утверждений об этих понятиях, принимаемых без доказательства. Наибольшие трудности у них вызвали пересечения кривых и движения. Они делали вывод о пересечении окружностей без аксиом, когда было, так сказать, видно, что они должны пересекаться. Никаких аксиом о том, когда отрезки или окружности пересекаются, у них не было. Движения они тоже не смогли включить в систему геометрических рассуждений, хотя и использовали их. Тем не менее древнегреческие математики умели доказывать весьма сложные теоремы.

Внутренняя область угла обладает одним коварным свойством. Рассмотрим неразвёрнутый угол AOB и начнём вращать луч OB (рис. 291). В тот момент, когда точка B попадает на продолжение луча OA, угол AOB становится развёрнутым. В таком случае внешняя и внутренняя области угла неразличимы (рис. 292).

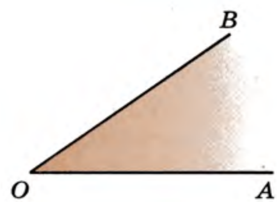


Рис. 291

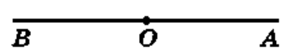


Рис. 292

Затем, когда луч OB продолжит вращение, внутренняя и внешняя области сразу же меняются местами (рис. 293). С этим свойством нам ещё предстоит не раз встретиться.

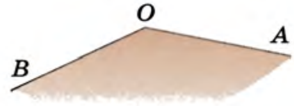


Рис. 293

Докажем два наглядно очевидных свойства внутренней области неразвёрнутого угла. Древнегреческие математики такие свойства не доказывали; у них не был разработан подход к их доказательству. Тем не менее, полезно поупражняться в таких доказательствах, чтобы лучше освоить доказательства, в которых участвуют точки, лежащие по одну сторону от прямой и по разные стороны.

Свойство 1 Если точка M лежит внутри угла AOB, то луч OM лежит внутри этого угла, а продолжение луча OM — вне угла.

Доказательство. Точки A и M лежат по одну сторону от прямой OB, поэтому луч OM лежит в полуплоскости с границей OB, содержащей точку A. Аналогично доказывается, что луч OM лежит в полуплоскости с границей OA, содержащей точку B.

Пусть точка M_1 лежит на продолжении луча OM. Тогда точки A и M_1 лежат по разные стороны от прямой OB, поэтому луч OM_1 лежит вне угла.

Свойство 2 Если точка M лежит внутри угла AOB, то луч OM пересекает отрезок AB.

Доказательство. Пусть A_1, B_1 и M_1 — точки на продолжениях лучей OA, OB и OM. Точки A и A_1 лежат по разные стороны от прямой OM, поэтому по одну сторону от этой прямой лежат либо точки A и B, либо точки A_1 и B, т. е. прямая OM пересекает либо отрезок AB, либо отрезок A_1B. Аналогично прямая OM пересекает либо отрезок AB, либо отрезок B_1A.

Точки M и A лежат по одну сторону от прямой OB, а точки A и A_1 — по разные стороны, поэтому точки M и A_1 лежат по разные стороны от прямой OB. Поэтому луч OM не пересекает отрезок A_1B. Аналогично луч OM не пересекает отрезок B_1A. Луч OM_1 тоже не пересекает отрезки A_1B и B_1A. Поэтому прямая OM пересекает отрезок AB. Но отрезок AB лежит внутри угла AOB, а луч OM_1 — вне. Поэтому отрезок AB пересекает именно луч OM.

К главе 2. Сравнение и измерение отрезков и углов. Если отрезок составлен из нескольких отрезков, то длина всего отрезка равна сум-

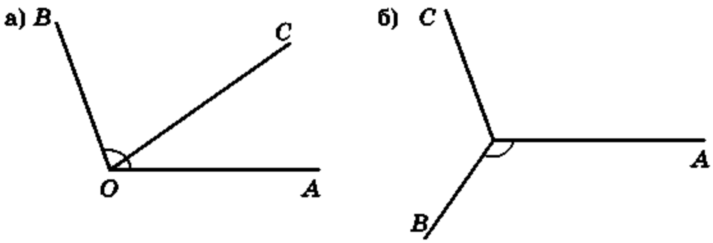


Рис. 294

ме длин этих отрезков. Как мы вскоре увидим, для углов всё гораздо сложнее из-за коварного свойства внешней области угла, о котором шла речь в комментариях к предыдущей главе.

Если на прямой отмечены точки A, B и C и заданы длины отрезков AB и BC, то длина отрезка AC не обязательно равна $AB + BC$. Дело в том, что точка B не обязательно лежит между точками A и C. А если точки A и C лежат по одну сторону от точки B, то длина отрезка AC равна $|AB - BC|$.

Если луч делит угол на два угла, то градусная мера всего угла равна сумме градусных мер этих двух углов. Это свойство такое же, как для длин отрезков. Если же два угла AOC и COB приложены друг к другу общей стороной OC так, что точки A и B лежат по разные стороны от прямой OC, то градусная мера угла AOB не всегда равна сумме градусных мер углов AOC и COB. Пусть сумма градусных мер углов AOC и COB равна $n°$. Если $n < 180$, то градусная мера угла AOB равна $n°$ (рис. 294, *а*). А если $n > 180$, то градусная мера угла AOB равна $360° - n°$ (рис. 294, *б*). Это происходит как раз из-за того, что внутренняя и внешняя области угла меняются местами.

Это явление заслуживает того, чтобы разобраться с ним детально. Точно так же, как прикладываются друг к другу отрезки A_1A_2, A_2A_3, ... (рис. 295, *а*), можно прикладывать друг к другу и углы A_1OA_2, A_2OA_3, ... (рис. 295, *б*). Приложив друг к другу отрезки, мы получим отрезок A_1A_n, и его длина равна сумме длин отрезков A_1A_2, A_2A_3, ..., $A_{n-1}A_n$. Приложив друг к другу углы, мы получим угол A_1OA_n,

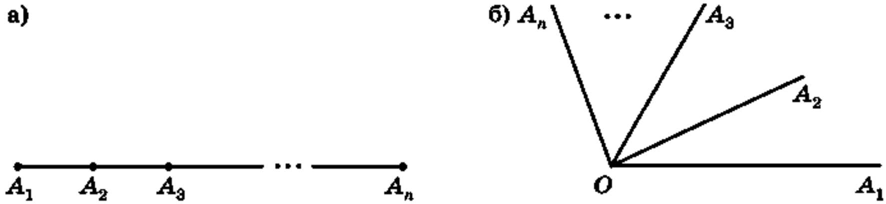


Рис. 295

градусная мера которого не обязательно равна сумме градусных мер углов A_1OA_2, A_2OA_3, ..., $A_{n-1}OA_n$. Тем не менее градусная мера угла A_1OA_n выражается через сумму градусных мер углов A_1OA_2, A_2OA_3, ..., $A_{n-1}OA_n$ по определённому правилу.

Каждый раз, когда сумма градусных мер перешагивает через 360°, из неё нужно вычитать 360°. Если в итоге сумма градусных мер окажется больше 180°, но меньше 360°, то эту сумму нужно вычесть из 360°. Таким образом, если сумма градусных мер равна $a°$, то сначала из $a°$ нужно вычитать по 360°, пока не останется меньше 360°. Если в итоге осталось не больше 180°, то мы уже получили требуемый ответ. А если в итоге осталось $b°$, где b больше 180 (но меньше 360), то градусная мера угла A_1OA_n равна $(360 - b)°$.

Предположим, что из точки O проведены лучи OA, OB и OC и заданы величины углов AOB и BOC; обозначим их α и β. Как и в случае отрезков, угол AOC не обязательно равен $\alpha + \beta$. Но для углов ситуация ещё более сложная, чем для отрезков. Угол AOC не обязательно равен $\alpha + \beta$ даже в том случае, когда лучи OA и OC лежат по разные стороны от прямой OB. Дело в том, что если $\alpha + \beta > 180°$, то угол AOC равен $360° - (\alpha + \beta)$. Но если лучи OA и OC лежат по одну сторону от прямой OB, то угол AOC равен $|\alpha - \beta|$. Сложностей с этим углом не возникает, потому что он меньше 180°.

К главе 3. Перпендикулярные прямые, смежные и вертикальные углы. Докажем, что

из точки A можно провести перпендикуляр к прямой a, и притом только один.

Доказательство. Пусть сначала точка A лежит на прямой a. Возьмём один из двух лучей, на которые точка A разделяет прямую a. От этого луча в данную полуплоскость можно отложить прямой угол, и притом только один. Пусть теперь точка A не лежит на прямой a. Убедимся сначала, что перпендикуляр провести можно. Мысленно перегнём плоскость по прямой a так, чтобы полуплоскость с границей a, содержащая точку A, наложилась на другую полуплоскость. Точка A при этом наложится на некоторую точку B. Точки A и B лежат в разных полуплоскостях, поэтому отрезок AB пересекает прямую a в некоторой точке H. При перегибании плоскости по прямой все точки этой прямой остаются на месте. В частности, точка H остаётся на месте. Поэтому луч HA наложится на луч HB. Пусть C — некоторая точка прямой a, отличная от точки H. Углы AHC и BHC накладываются друг на друга, поэтому они равны. У этих углов сторона HC общая, а стороны HA и HB являются продолжениями одна другой, поэтому углы AHC и BHC смежные. Из равенства смежных углов следует, что они прямые. Поэтому прямые a и AH перпендикулярны.

Убедимся теперь, что из точки A можно провести только один перпендикуляр AH к прямой a. Снова рассмотрим точку B, на которую наложится точка A при перегибании плоскости по прямой a, и некоторую точку C прямой a, отличную от точки H. Углы AHC и BHC равны и угол AHC прямой, поэтому угол AHB развёрнутый. Следовательно, точка H — это общая точка прямых a и AB, а такая точка только одна. Прямая, проходящая через точки A и H, тоже только одна. ●

В рассуждениях с перегибанием плоскости мы, конечно, используем какие-то новые, ещё не встречавшиеся нам утверждения, принимаемые без доказательства. Они связаны как раз с тем понятием движения, которое древнегреческие математики не смогли включить в свою систему рассуждений. Так что сложности здесь есть, и немалые. Что такое движения плоскости, подробно обсуждается в 9 классе. Важнейшее свойство движений заключается в том, что движение совмещает отрезок с равным ему отрезком и угол с равным ему углом. Именно равенство совмещённых углов мы использовали при доказательстве.

К главе 5. Признаки равенства треугольников. Теоремы о первом и втором признаках равенства треугольников доказываются с помощью наложения одного треугольника на другой. При доказательстве теоремы о третьем признаке равенства треугольников не удаётся обойтись только наложением, нужны ещё какие-то рассуждения. Если у треугольников ABC и $A_1B_1C_1$ равны стороны AB и A_1B_1, стороны BC и B_1C_1 и стороны AC и A_1C_1, то можно наложить отрезок AB на отрезок A_1B_1 так, чтобы точка A наложилась на точку A_1, а точка B — на точку B_1. Сделать это можно двумя способами: так, чтобы точки C и C_1 оказались по разные стороны от прямой AB, и так, чтобы они оказались по одну сторону. Доказательство можно получить и в том и в другом случае, но эти доказательства разные. Приведём оба доказательства.

Доказательство первое. Пусть сначала точки C и C_1 лежат по разные стороны от прямой AB. Проведём отрезок CC_1. Он пересекает прямую AB в некоторой точке. Предположим сначала, что эта точка расположена между точками A и B. Углы при основании равнобедренного треугольника CAC_1 равны, углы при основании равнобедренного треугольника CBC_1 тоже равны. Поэтому угол ACB составлен из двух углов, равных углам, из которых составлен угол AC_1B. Следовательно, эти углы равны, и можно воспользоваться первым признаком равенства треугольников. Если отрезок CC_1 пересекает прямую AB в точке, расположенной вне отрезка AB, то углы ACB и AC_1B равны, потому что они получаются вычитанием равных углов из равных углов. Наконец, если отрезок CC_1 пересекает прямую AB в точке A или в точке B, то равенство углов ACB и AC_1B следует непосредственно из того, что углы при основании равнобедренного треугольника равны.

Доказательство второе. Пусть теперь точки C и C_1 лежат по одну сторону от прямой AB. Достаточно доказать, что точка C накладывается на точку C_1. Предположим, что после наложения отрезка AB на отрезок A_1B_1 точки C и C_1 оказались по одну сторону от прямой AB, но не совпали. Вершины A и B равнобедренных треугольников CAC_1 и CBC_1 с общим основанием CC_1 лежат на прямой, проходящей через середину отрезка CC_1. Но этого не может быть: точки C и C_1 лежат по одну сторону от прямой AB, поэтому прямая AB не пересекает отрезок CC_1. Полученное противоречие означает, что точки C и C_1 совпадают.

При записи равенства треугольников удобно соблюдать соответствие вершин, чтобы равенство $\triangle ABC = \triangle DEF$ означало не только равенство треугольников ABC и DEF, но и равенство соответственных сторон: $AB = DE$, $BC = EF$ и $AC = DF$. Соответственные углы при этом тоже равны: $\angle A = \angle D$, $\angle B = \angle E$ и $\angle C = \angle F$. Вершины треугольников, равенство которых нужно доказать, могут быть обозначены разными буквами, например KFM и DQR. Прежде всего нужно установить соответствие вершин треугольников. В случае равенства углов всё просто: вершины равных углов соответствуют друг другу. В случае равенства сторон ситуация более сложная. Если $MK = QR$, то вершина M соответствует либо вершине Q, либо вершине R. Разберём два наиболее сложных примера (когда есть две пары равных сторон и пара равных углов и когда есть три пары равных сторон).

Если $MK = QR$, $KF = DQ$ и $\angle K = \angle Q$, то вершина K соответствует вершине Q (начинаем с самого простого). Затем из равенства $MK = QR$ получаем, что вершина M соответствует вершине R. После этого остались вершины F и D.

Если $FM = QD$, $QR = KM$ и $FK = RD$, то посмотрим на два первых равенства. Там присутствуют две одинаковые буквы: M и Q. Эти вершины соответственные. Вычеркнув их, получим остальные соответственные вершины: F и D, R и K.

К главе 6. Прямоугольные треугольники. Чтобы двигаться дальше, нам нужно следующее свойство прямоугольного треугольника: *углы, лежащие против катетов, острые и их сумма равна 90°.* Но это свойство нельзя доказать, опираясь лишь на принятые ранее без доказательства утверждения. Требуется какое-то новое утверждение. Такие утверждения могут быть разными. Все они так или иначе связаны с параллельными прямыми, поэтому подробности мы обсудим в комментариях к главе 11. Принимаемое нами сейчас без доказательства утверждение таково.

Для любых двух отрезков существует прямоугольник, две смежные стороны которого равны этим отрезкам.

Прежде чем переходить к доказательству свойств прямоугольного треугольника, докажем что

противоположные стороны прямоугольника равны.

Доказательство. Проведём для этого через середину M стороны AB прямоугольника $ABCD$ прямую, перпендикулярную прямой AB. Эта прямая не имеет общих точек с прямыми AD и BC, поэтому точки C и D лежат по разные стороны от неё. Следовательно, отрезок CD пересекает проведённую прямую в некоторой точке N. Наложим угол AMN на равный ему угол BMN так, чтобы луч MA наложился на луч MB, а луч MN остался на месте. Тогда точка A наложится на точку B, луч AD — на луч BC. Поэтому точка D наложится на некоторую точку прямой BC, а перпендикуляр ND к прямой AD наложится на некоторый перпендикуляр к прямой BC. Из точки N можно провести только один перпендикуляр к прямой BC, поэтому точка D наложится на точку C и сторона AD наложится на сторону BC. Следовательно, $AD = BC$.

Теперь уже можно доказать, что

углы прямоугольного треугольника, лежащие против катетов, острые и их сумма равна 90°.

Доказательство. Достроим треугольник ABC с прямым углом C до прямоугольника $ACBD$. Треугольники ABC и BAD равны по трём сторонам. Поэтому $\angle BAC + \angle ABC = \angle BAC + \angle BAD = \angle CAD = 90°$.

Отметим, что вместо утверждения о существовании прямоугольника с двумя заданными смежными сторонами можно принять без доказательства утверждение о том, что сумма углов прямоугольного треугольника равна 180°. Действительно, существование прямоугольного треугольника с заданными катетами очевидно, а из двух равных прямоугольных треугольников можно сложить прямоугольник (рис. 296). Два угла полученной фигуры — прямые углы прямоугольных треугольников, а два других угла сложены из двух острых углов прямоугольного треугольника, поэтому они тоже прямые.

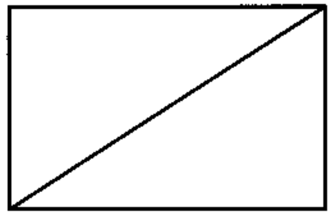


Рис. 296

К главе 7. Сумма углов треугольника. В комментариях к главе 6 доказано, что сумма углов прямоугольного треугольника равна 180°. Воспользовавшись этим, можно доказать, что

сумма углов любого треугольника равна 180°.

Доказательство. Действительно, проведём высоту CH треугольника ABC. Если угол A отличен от прямого и угол B отличен от прямого, то точка H лежит либо внутри отрезка AB (рис. 297, *а*), либо вне его. Во втором случае для определённости можно считать, что точка H лежит на луче AB (рис. 297, *б*); если точка H лежит на луче BA, то доказательство аналогично. В первом случае сумма углов треугольника ABC равна сумме острых углов прямоугольных треугольников ACH и BCH. Во втором случае введём обозначения $\alpha = \angle CAH$ и $\beta = \angle CBH$. Тогда $\angle BAC = \alpha$, $\angle ABC = 180° - \beta$ и $\angle ACB = (90° - \alpha) - (90° - \beta) = \beta - \alpha$. Поэтому сумма углов треугольника ABC в этом случае также равна 180°.

С суммой углов треугольника связан вопрос, ответить на который не так просто, как может показаться на первый взгляд. Пусть задан отрезок AB и заданы углы α и β, сумма которых меньше 180°. Всегда ли найдётся треугольник ABC с заданной стороной AB и заданными углами $\angle A = \alpha$ и $\angle B = \beta$?

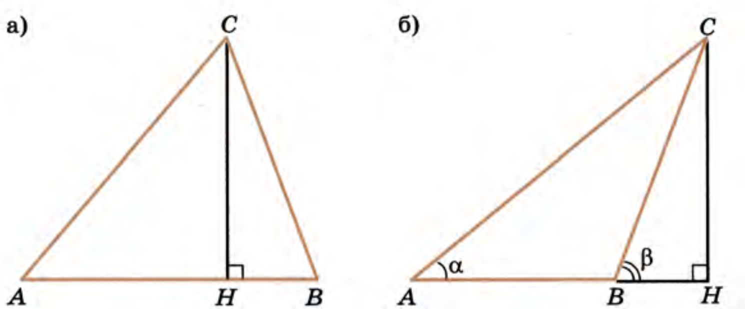


Рис. 297

Попытаемся построить такой треугольник. Отложим от лучей AB и BA углы CAB и DBA, равные α и β, так, чтобы они были расположены по одну сторону от прямой AB (рис. 298). Если эти лучи пересекаются, то мы найдём требуемый треугольник. Но почему они пересекаются?

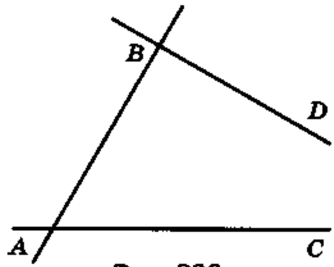


Рис. 298

Предварительно докажем следующее утверждение.

Пусть на стороне OA острого угла AOB отложены равные отрезки $OA_1 = A_1A_2 = ... = A_{n-1}A_n$ и из их концов проведены перпендикуляры A_1B_1, A_2B_2, ..., A_nB_n к прямой OB (рис. 299). Тогда $OB_1 = B_1B_2 = ... = B_{n-1}B_n$.

Доказательство. Равенство $OB_1 = B_1B_2$ следует из того, что медиана B_2A_1 прямоугольного треугольника OA_2B_2 равна половине гипотенузы (пример 2 на с. 17). Действительно, треугольник OA_1B_2 равнобедренный, поэтому его высота A_1B_1 является также медианой.

Чтобы доказать равенство $B_1B_2 = B_2B_3$, проведём из точки A_1 перпендикуляр A_1C_3 к прямой A_3B_3. Он пересекает отрезок A_2B_2 в некоторой точке C_2 (рис. 300). Равенство $A_1C_2 = C_2C_3$ доказывается точно так же, как в предыдущем случае. Из этого равенства следует требуемое равенство, поскольку противоположные стороны прямоугольника равны. Остальные равенства доказываются аналогично.

Докажем теперь, что **лучи AC и BD пересекаются (см. рис. 298).**

Доказательство. В той же полуплоскости с границей AB, в которой лежат лучи AC и BD, проведём луч BE так, что $\angle ABE = 180° - \alpha$. Луч BD расположен во внутренней области угла ABE, поскольку $\beta < 180° - \alpha$. Проведём из точки B перпендикуляр BH к прямой AC,

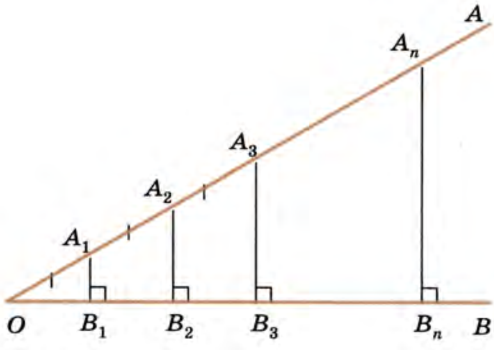


Рис. 299

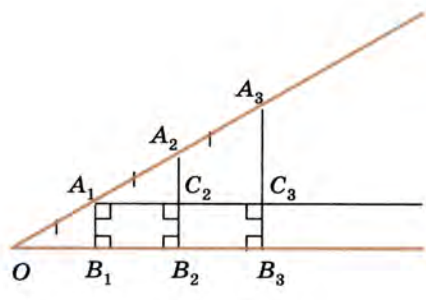


Рис. 300

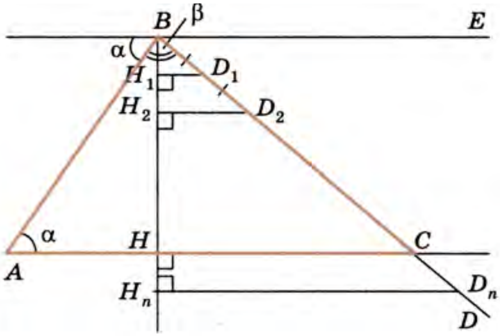


Рис. 301

отложим на луче BD равные отрезки $BD_1 = D_1D_2 = D_2D_3 = ...$ и проведём из их концов перпендикуляры D_1H_1, D_2H_2, ... к прямой BH (рис. 301). Отрезки BH_1, H_1H_2, H_2H_3, ... равны, поэтому $BH_n > BH$ для некоторого n. Точки B и H_n лежат по разные стороны от прямой HC и прямые HC и H_nD_n не имеют общих точек, поэтому точки B и D_n тоже лежат по разные стороны от прямой AC. Следовательно, отрезок BD_n пересекает прямую AC. Во внутренней области угла ABE расположен именно луч AC, а не его продолжение, поэтому луч AC пересекает луч BD, что и требовалось доказать.

Доказательство получилось длинное, поэтому имеет смысл ещё раз повторить другими словами, что же именно мы доказали. Предположим, что по одну сторону от прямой AB расположены лучи AC и BD, причём сумма углов CAB и DBA меньше 180°. Тогда лучи AC и BD пересекаются.

Именно это утверждение древнегреческий математик Евклид принял без доказательства при описании планиметрии. В его списке оно шло под последним, пятым, номером, и получило поэтому название *пятый постулат*. Обойтись без пятого постулата нельзя. Но его можно заменить на какое-нибудь другое утверждение. Например, мы приняли без доказательства утверждение о том, что существует прямоугольник с двумя заданными смежными сторонами, и вывели из него пятый постулат Евклида.

К главе 8. Медианы, биссектрисы и высоты треугольника. На с. 29 в решении примера 1 мы не объяснили, почему **биссектрисы** $\boldsymbol{AD}$ **и** $\boldsymbol{BE}$ **треугольника** $\boldsymbol{ABC}$ **пересекаются в некоторой точке** $\boldsymbol{O}$. Приведём это доказательство для тех, кто разобрался со свойствами внутренних областей углов в комментариях к главе 1.

Доказательство. Воспользуемся свойством 2 со с. 224: если точка M расположена внутри угла AOB, то луч OM пересекает отрезок AB.

Луч AD пересекает отрезок BE в некоторой точке O. Луч BE пересекает отрезок AD в той же самой точке (прямые AD и BE имеют только одну общую точку). Поэтому отрезки AD и BE имеют общую точку O. При этом точка O лежит внутри треугольника ABC. Действительно, точка O лежит внутри угла BAC, поэтому точки O и B лежат по одну сторону от прямой AC. Точка O лежит также и внутри угла ABC, поэтому точки O и A лежат по одну сторону от прямой BC. Следовательно, точка O лежит внутри угла ACB. ●

На с. 32 в условии задачи 8.14 предполагается, что биссектрисы углов DBC и ECB пересекаются. Покажем, что такое предположение делать не обязательно: эти биссектрисы всегда пересекаются.

Доказательство. Пусть точки D и E лежат на продолжениях сторон AB и AC треугольника ABC за точки B и C (т. е. на продолжениях лучей BA и CA). Биссектрисы углов DBC и ECB образуют острые углы с отрезком BC. Сумма двух острых углов меньше 180°, поэтому биссектрисы пересекаются в некоторой точке O. ●

Воспользовавшись тем, что некоторые тройки биссектрис углов треугольника и его внешних углов пересекаются, можно прийти к следующему наблюдению. Проведём биссектрисы углов треугольника ABC и его внешних углов. Биссектрисы треугольника пересекаются в точке I, а биссектрисы пар внешних углов пересекаются в точках A_1, B_1, C_1, через которые проходят биссектрисы углов треугольника (рис. 302). Биссектрисы смежных углов перпендикулярны, поэтому отрезки AA_1, BB_1 и CC_1 — высоты треугольника $A_1B_1C_1$. Они пересекаются в одной точке — в точке I.

В задачах для 8 класса нам встретится следующее утверждение:

если AA_1 и BB_1 — высоты остроугольного треугольника ABC, то $\angle A = \angle B_1A_1C$.

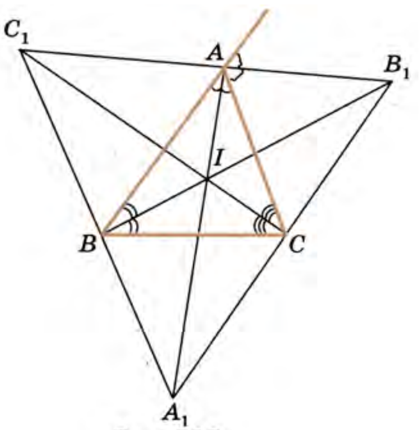


Рис. 302

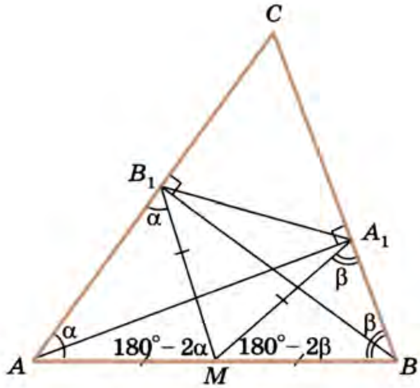


Рис. 303

Там оно доказывается разными методами, с которыми мы пока не знакомились. Но его можно доказать уже сейчас, хотя и с помощью некоторых вычислений.

Доказательство. Отметим середину M стороны AB (рис. 303). Отрезки MA_1 и MB_1 — медианы прямоугольных треугольников ABA_1 и ABB_1, поэтому они равны половине их общей гипотенузы AB. Пусть $\alpha = \angle A$ и $\beta = \angle B$. Тогда углы AMB_1 и A_1MB, противолежащие основаниям равнобедренных треугольников, равны $180° - 2\alpha$ и $180° - 2\beta$. Далее, $\angle A_1MB_1 = 2\alpha + 2\beta - 180°$, поэтому углы при основании равнобедренного треугольника A_1B_1M равны $180° - \alpha - \beta$. Следовательно, $\angle B_1A_1C = 180° - \angle B_1A_1M - \angle MA_1B = 180° - (180° - \alpha - \beta) - \beta = \alpha = \angle A_1$.

К главе 10. Задачи на построение. При построениях часто бывает нужно отметить произвольную точку или провести произвольную прямую. Например, когда нужно построить треугольник по трём сторонам, выбирают место для его построения, указав положения двух вершин.

Но даже в тех случаях, когда расположение фигуры задано и выбирать его не нужно, произвольные точки и произвольные прямые часто проводятся. Например, биссектриса неразвёрнутого угла строится следующим образом. На одной из сторон угла с вершиной A отмечается произвольная точка B, затем проводится окружность радиуса AB с центром A. Она пересекает другую сторону угла в точке C. Мы строим середину M отрезка BC и проводим луч AM. В этом случае выбирается произвольная точка, она используется при построении, но результат построения от выбора этой точки не зависит.

Но с выбором произвольной точки бывают и более сложные ситуации: её нельзя выбирать совсем произвольно. Например, при построении прямой, проходящей через данную точку M перпендикулярно данной прямой a, выбирается произвольная точка A и через неё проводится окружность с центром M. Если эта окружность пересекает прямую a в двух точках, то затем строится середина отрезка с концами в этих точках. Но эта окружность не всегда пересекает прямую a. А если окружность не пересекает прямую a, то построение не получится. Таким образом, в этом случае выбирается точка и она используется при построении. Точка выбирается не произвольно, но не из нескольких специальных точек. Результат построения от выбора точки не зависит.

К главе 11. Параллельные прямые. В комментариях к главе 3 было доказано, что из точки, не лежащей на прямой, можно провести только один перпендикуляр к этой прямой. Из этого следует, что через точку A, не лежащую на прямой a, проходит прямая, параллельная прямой a. Действительно, проведём из точки A перпендикуляр AH к прямой a и затем проведём через точку A прямую b, перпендикулярную прямой AH. Прямые a и b не пересекаются.

Более сложным является вопрос, можно ли через точку A провести несколько прямых, параллельных прямой a. Следующие три утверждения тесно связаны друг с другом.

1. *Через точку A, не лежащую на прямой a, проходит только одна прямая, параллельная прямой a.*

2. *Сумма углов треугольника равна 180°.*

3. *Существует прямоугольник с двумя заданными смежными сторонами.*

В комментариях к главе 6 рассказано, как утверждения 2 и 3 выводятся друг из друга. Покажем теперь, как из утверждения 3 выводится утверждение 1.

Доказательство. В комментариях к главе 7 (исходя из утверждения 3) было доказано следующее. Пусть по одну сторону от прямой AB расположены лучи AC и BD, причём сумма углов CAB и DBA меньше 180°. Тогда лучи AC и BD пересекаются.

Проведём через точку A прямую AM, отличную от прямой b. Можно считать, что точки M и H лежат по одну сторону от прямой b (рис. 304). Угол HAM острый, поэтому луч AM пересекает прямую a. Утверждение 1 доказано.

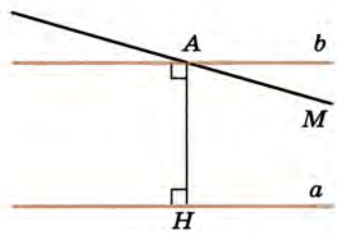


Рис. 304

Выведем теперь из утверждения 1 утверждение 2. Рассуждения будут длинные, но попутно мы докажем несколько свойств параллельных прямых.

Доказательство. Из утверждения 1 следует, что если прямая пересекает одну из двух параллельных прямых, то она пересекает и другую прямую. Действительно, если прямая пересекает только первую параллельную прямую и не пересекает вторую, то через точку пересечения проходят две прямые, параллельные второй прямой.

Внешний угол треугольника ABC с вершиной A больше угла B. Это можно доказать, не используя утверждение 2. Для доказательства достаточно удвоить медиану CM и построить точку C_1: внешний угол с вершиной A больше угла BAC_1, равного углу B.

Если при пересечении двух прямых секущей накрест лежащие углы равны, то эти прямые не пересекаются. Действительно, если бы эти прямые имели общую точку, то получился бы треугольник, у которого внешний угол равен одному из углов треугольника, не смежному с этим внешним углом, чего не может быть.

Воспользовавшись утверждением 1, покажем, что если две параллельные прямые a и b пересечены секущей c, то накрест лежащие углы равны. Проведём через точку пересечения прямых b и c прямую b_1 так, чтобы накрест лежащие углы, образованные прямыми a и b_1 и секущей c, были равны. Тогда прямая b_1 параллельна прямой a и проходит через точку прямой b, поэтому прямые b и b_1 совпадают.

Непосредственно из утверждений о накрест лежащих углах следуют аналогичные утверждения для других пар углов: соответственных и односторонних.

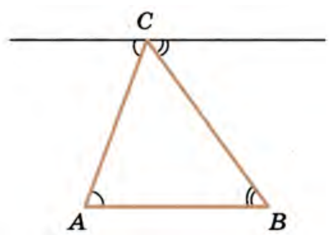


Рис. 305

Утверждение 2 теперь очень просто выводится из того, что накрест лежащие углы, образованные при пересечении параллельных прямых секущей, равны. Действительно, проведём через вершину C треугольника ABC прямую, параллельную прямой AB, и отметим равные соответственные углы, образованные при пересечении параллельных прямых секущими AC и BC (рис. 305). Угол C и два угла с вершиной C, равных углам A и B, в сумме составляют 180°.

К главе 13. Теорема Фалеса. Средняя линия треугольника.

Медианы треугольника пересекаются в одной точке, которая делит каждую медиану в отношении 2 : 1, считая от вершины.

Доказать это, используя свойство средней линии треугольника или теорему Фалеса, можно разными способами. Приведём два таких доказательства. В обоих случаях будем доказывать, что если медианы AA_1 и BB_1 треугольника ABC пересекаются в точке M, то $AM : MA_1 = 2 : 1$. Из этого сразу же следует требуемое утверждение, поскольку медиана CC_1 тоже пересекает медиану AA_1 в точке M, для которой $AM : MA_1 = 2 : 1$.

Доказательство первое. Рассмотрим точки P и Q — середины отрезков AM и BM. Отрезки PQ и B_1A_1 — средние линии треугольников AMB и ACB, поэтому они параллельны отрезку AB и равны его половине. Следовательно, четырёхугольник PQA_1B_1 — параллелограмм, и его диагонали делятся точкой пересечения пополам. Таким образом, $A_1M = MP = PA$ и $AM = 2A_1M$.

Доказательство второе. Проведём через середину A_1 отрезка BC и через середину P отрезка AM прямые, параллельные медиане BB_1. Эти прямые проходят через середины K и L равных отрезков CB_1 и B_1A, поэтому $AL = LB_1 = B_1K = KC$. Из теоремы Фалеса следует, что $A_1M = MP = PA$ и $AM = 2A_1M$.

К главе 21. Вписанная и описанная окружности. Доказательство того, что серединные перпендикуляры к сторонам треугольника пересекаются в одной точке, нужно начинать с доказательства того, что два серединных перпендикуляра пересекаются. Часто это доказательство опускают, поэтому обсудим его. Оно использует свойства параллельных прямых, в частности, такое свойство: *прямая, перпендикулярная одной из двух параллельных прямых, перпендикулярна и другой прямой.* Для доказательства этого свойства нужно сначала воспользоваться тем, что прямая, пересекающая одну из двух параллельных прямых, пересекает и другую, а затем воспользоваться равенством накрест лежащих углов (эти углы прямые). Докажем, что

серединные перпендикуляры l и m к сторонам AB и BC треугольника ABC пересекаются.

Доказательство. Предположим, что прямые l и m не имеют общих точек, т. е. параллельны. Прямая AB перпендикулярна прямой l, поэтому она перпендикулярна также и прямой m. Прямая BC тоже перпендикулярна прямой m. Через точку B проходит единственная прямая, перпендикулярная прямой m, поэтому точки A, B и C лежат на одной прямой, чего не может быть.

К главе 23. Выпуклые и невыпуклые многоугольники. При определении величины угла невыпуклого многоугольника возникает трудность, связанная с тем, что при вращении стороны угла в определённый момент внутренняя и внешняя области угла меняются местами (см. комментарии к главе 1). Для выпуклого многоугольника величина угла с вершиной A, из которой выходят стороны AB и AC, равна величине угла BAC. Сумма величин углов выпуклого n-угольника равна $(n-2)\cdot 180°$. Для невыпуклого многоугольника величину угла с вершиной A можно определить точно так же, но тогда сумма величин углов невыпуклого n-угольника не будет равна $(n-2)\cdot 180°$. Рассмотрим, например, невыпуклый четырёхугольник $ABCD$, вершина A которого лежит внутри треугольника BCD. Чтобы сумма величин углов этого четырёхугольника оказалась равной 360°, вместо угла BAD нужно взять угол $360° - \angle BAD$. В общем случае нужно поступить следующим образом. Для вершины A, из которой выходят стороны AB и AC, рассмотрим окружность с центром A достаточно малого радиуса (такая окружность не пересекает сторон многоугольника, отличных от AB и AC, и не содержит вершин, отличных от A). Величина угла многоугольника с вершиной A — это градусная мера дуги этой окружности, расположенной внутри многоугольника. При таком определении величины угла сумма углов любого n-угольника равна $(n-2)\cdot 180°$. Доказать это можно, разрезав многоугольник диагоналями на треугольники. (Такое разрезание существует и для невыпуклого многоугольника, но доказывать это мы не будем.)

Содержание

Предисловие 3
Глава 1. Прямая и отрезок, луч и угол 4
Глава 2. Сравнение и измерение отрезков и углов 7
Глава 3. Перпендикулярные прямые, смежные и вертикальные углы 11
Глава 4. Равнобедренный треугольник 12
Глава 5. Признаки равенства треугольников 13
Глава 6. Прямоугольные треугольники 16
Глава 7. Сумма углов треугольника 23
Глава 8. Медианы, биссектрисы и высоты треугольника 29
Глава 9. Окружность и круг 34
Глава 10. Задачи на построение 38
Глава 11. Параллельные прямые 41
Глава 12. Параллелограмм и трапеция 45
Глава 13. Теорема Фалеса. Средняя линия треугольника 49
Глава 14. Вписанный угол 53
Глава 15. Соотношения между сторонами и углами треугольника 57
Глава 16. Теорема Пифагора 61
Глава 17. Подобные треугольники 63
Глава 18. Теоремы синусов и косинусов 69
Глава 19. Площадь 74
Глава 20. Касательные и секущие 80
Глава 21. Вписанная и описанная окружности 85
Глава 22. Соотношения в треугольнике 92
Глава 23. Выпуклые и невыпуклые многоугольники 98
Глава 24. Движения 103
Глава 25. Подобие 110
Глава 26. Методы решения задач на построение 113
Глава 27. Координаты 117
Глава 28. Векторы 120
Глава 29. Правильные многоугольники 123
Глава 30. Длина окружности и площадь круга 124
Ответы 127
Указания 130
Пояснения и комментарии 223

Учебное издание

Серия «Внеурочная деятельность»

Прасолов Виктор Васильевич

Решение задач повышенной сложности по геометрии 7—9 классы

Учебное пособие
для общеобразовательных организаций

Центр естественно-математического образования
Редакция математики и информатики
Зав. редакцией *Е. В. Эргле*
Редактор *П. А. Бессарабова*
Младший редактор *Е. А. Андреенкова*
Разработка серийного внешнего
оформления дизайнера *В. А. Андрианова*
Художественный редактор *Т. В. Глушкова*
Компьютерная графика *И. В. Губиной*
Техническое редактирование и компьютерная вёрстка
Е. В. Семериковой, О. В. Сиротиной
Корректоры *Е. В. Барановская, И. А. Григалашвили*

Налоговая льгота — Общероссийский классификатор продукции ОК 005-93—953000. Изд. лиц. Серия ИД № 05824 от 12.09.01. Подписано в печать 04.12.18. Формат 70×90 $^1/_{16}$. Бумага типографская. Гарнитура SchoolBookCSanPin. Печать офсетная. Уч.-изд. л. 13,15. Доп. тираж 1500 экз. Заказ № 6033ТТ.

Акционерное общество «Издательство «Просвещение».
Российская Федерация, 127473, г. Москва, ул. Краснопролетарская, д. 16, стр. 3, этаж 4, помещение I.

Отпечатано в России.

Отпечатано по заказу АО «ПолиграфТрейд» в ООО «Тульская типография».
300026, г. Тула, пр-т Ленина, 109.